

**RAÚL FERNANDO CASTELLÓN  
TORRICO**

**OTIMIZAÇÃO DE FORMA E  
TOPOLOGIA DE PLACAS USANDO  
O MÉTODO *LEVEL SET***

**FLORIANÓPOLIS**

**2014**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**OTIMIZAÇÃO DE FORMA E TOPOLOGIA DE PLACAS  
USANDO O MÉTODO *LEVEL SET***

Dissertação submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a obtenção do grau de  
Mestre em Engenharia Mecânica

**RAÚL FERNANDO CASTELLÓN TORRICO**

Florianópolis, Maio de 2014



# **OTIMIZAÇÃO DE FORMA E TOPOLOGIA DE PLACAS USANDO O MÉTODO *LEVEL SET***

**RAÚL FERNANDO CASTELLÓN TORRICO**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica, Área de concentração Análise e Projeto Mecânico, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.

---

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.  
Orientador

---

Armando Albertazzi Gonçalves Jr., Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Banca Examinadora:

---

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.  
Presidente

---

Lindauro Maria Steffens, Dra.

---

José Carlos de Carvalho Pereira, Dr. Eng.

---

Júlio Apolinário Cordioli, Dr. Eng.



## **AGRADECIMENTOS**





Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

## **OTIMIZAÇÃO DE FORMA E TOPOLOGIA DE PLACAS USANDO O MÉTODO *LEVEL SET***

**Raúl Fernando Castellón Torrico**

Maio / 2014

Orientador: Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.

Área de Concentração: Análise e Projeto Mecânico.

Palavras-chave: Otimização de forma e topologia, método *level set*, Método de Galerkin livre de elementos.

Esta dissertação apresenta uma abordagem sobre o desenvolvimento teórico e computacional da análise da otimização de forma e topologia para a minimização da flexibilidade (*compliance*) em placas planas modelada pela teoria de Mindlin. O problema de minimização da *compliance* está sujeito a restrições de volume e perímetro impostos pelo método do multiplicador de Lagrange. O problema de otimização utiliza o método *level set*. A função *level set* é utilizada para a definição do contorno da placa, sendo as diferentes topologias obtidas ao longo do processo de otimização pela solução da equação de Hamilton-Jacobi. A equação de Hamilton-Jacobi requer a determinação da velocidade normal a ser imposta no contorno, a qual é obtida após a solução da equação de estado da placa e pela análise de sensibilidade. A evolução da função *level set* é regida pela equação de Hamilton - Jacobi. Então, a equação de Hamilton-Jacobi é resolvida usando o método de Galerkin livre de elementos via *streamline diffusion* (SDEFGM). Alguns exemplos com resultados são apresentados para serem discutidos e comparados com a literatura.



Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Mechanical Engineering.

## **SHAPE AND TOPOLOGY OPTIMIZATION OF PLATES USING THE LEVEL SET METHOD**

**Raúl Fernando Castellón Torrico**

May / 2014

Advisor: Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.

Area of Concentration: Mechanical Analysis and Design.

Keywords: Shape and topology optimization, level set method, element-free Galerkin methods.

Number of pages: 144

This dissertation presents an approach to the development of theoretical and computational analysis of the topology and shape optimization for minimization of flexibility (compliance) in flat plates modeled by Mindlin theory. The minimization problem of compliance is subject to restrictions imposed by the volume and perimeter of the Lagrange multiplier method. The optimization problem uses the method level. The level set function is used to define the contour of the plate, with different topologies obtained during the optimization process by solving the Hamilton-Jacobi equation. The Hamilton-Jacobi equation requires the determination of the normal velocity to be imposed on the boundary, which is obtained after the solution of the equation of state of the plate and the sensitivity analysis. The evolution of the function level set is governed by the equation of Hamilton-Jacobi. Then the Hamilton-Jacobi equation is solved using the Galerkin method free of elements by Streamline Diffusion (SDEFGM). Some examples are presented with results to be discussed and compared with literature.



## LISTA DE FIGURAS

1.1	Um exemplo da função level set $\phi$ e domínio $\Omega$ antes e depois de uma atualização de desenho (DIJK et al., 2013). . . . .	4
2.1	Corpo elástico sujeito a cargas prescritas (JUNIOR, 2003). . .	13
2.2	Configuração da placa deformada e indeformada segundo a teoria de primeira ordem (BELO, 2006). . . . .	16
2.3	Esforços em placa plana (BELO, 2006). . . . .	19
4.1	Representação da função level set no domínio em 2D e no espaço 3D (LUO et al., 2012). . . . .	55
4.2	Aproximação do limite curvo usando três nós de elementos finitos triangulares (FISH; BELYTSCHKO, 2007). . . . .	58
5.1	Placa quadrada simplesmente apoiada (TELES, 2007). . . . .	78
5.2	Função step regularizada (JUNIOR, 2011) e faixa de cores para cada valor adotado. . . . .	82
5.3	Placa retangular engastada em ambos lados - Problema 2. . .	83
5.4	Diferentes opções para a configuração inicial para o problema 2. . .	84
5.5	Configuração final para o problema 2. . . . .	84
5.6	Convergência da função objetivo para o problema 2. . . . .	85
5.7	Placa engastada no contorno sobre carga transversal - Problema 3 (JUNIOR, 2003). . . . .	86
5.8	Malha estruturada com 800 células de integração triangulares. . . . .	86
5.9	Configuração inicial do problema. . . . .	87
5.10	Resultados intermediários do problema 3. . . . .	87
5.11	Resultados intermediários do problema 3. . . . .	88
5.12	Configuração final do problema 3. . . . .	88
5.13	a) Configuração final do problema 3 segundo Junior (2003). b) Configuração final do problema 3 segundo Bendsoe e Sig- mund (2003). . . . .	89
5.14	Convergência da função objetivo do problema 3. . . . .	90
5.15	Placa quadrada engastada em torno dos vértices sobre carga transversal - Problema 4 (JUNIOR, 2003). . . . .	91
5.16	Resultados intermediários do problema 4. . . . .	91
5.17	Resultados intermediários do problema 4. . . . .	92
5.18	a) Configuração final do problema 4. b) Configuração final do problema 4 segundo Junior (2003). . . . .	92
5.19	Convergência da função objetivo do problema 4. . . . .	93
5.20	Placa engastada no lado sobre carga transversal - Problema 5 (JUNIOR, 2003). . . . .	94

5.21	Resultados intermediários do problema 5. . . . .	95
5.22	Resultados intermediários do problema 5. . . . .	95
5.23	a) Configuração final do problema 5. b) Configuração final do problema 5 segundo Bendsoe e Sigmund (2003). . . . .	96
5.24	Convergência da função objetivo do problema 5. . . . .	96
A.1	Sistema de eixos de ortotropia da lâmina (REDDY, 2004). . .	106
A.2	Sistemas de eixos de ortotropia e referência (REDDY, 2004). .	108
A.3	Orientação das placas laminadas (REDDY, 2004). . . . .	112
A.4	Identificação das lâminas no laminado (REDDY, 2004). . . .	116
C.1	Perturbação de domínio induzido por mapeamento $T$ (CHOI; KIM, 2006). . . . .	125
C.2	Variação de domínio utilizando o mapeamento linear (CHOI; KIM, 2006). . . . .	128
D.1	Funções peso em um problema unidimensional (TELES, 2007). .	140
D.2	Domínio de influência circular (TELES, 2007). . . . .	142
D.3	Significado geométrico do parâmetro $r_{I_{\max}}$ (TELES, 2007). . .	142

## LISTA DE TABELAS

5.1	Resultados do problema 1 com $s = 1.5$ . . . . .	79
5.2	Resultados do problema 1 com $s = 1.8$ . . . . .	80
5.3	Resultados do problema 1 com $s = 2.0$ . . . . .	81





## LISTA DE SÍMBOLOS

$\partial\Omega$	Contorno de superfície.
$\phi$	Função level set.
$\rho$	Função paramétrica.
$\Omega$	Domínio material.
$D\backslash\Omega$	Domínio vazio.
$\Gamma$	Interface de material.
$D$	Domínio fixo de projeto.
$\mathbb{D}$	Tensor constitutivo elástico de quarta ordem.
$\vec{b}$	Forças de corpo.
$\vec{t}$	Trações prescritas.
$\vec{u}$	Campo de deslocamentos.
$\sigma$	Tensor tensão.
$\varepsilon$	Tensor deformação.
$\mathbf{V}_0$	Conjunto dos deslocamentos admissíveis.
$\mathbf{Var}_0$	Conjunto das variações admissíveis.
$a(\Omega, \vec{u}, \vec{w})$	Forma bilinear.
$l(\Omega, \vec{w})$	Forma linear.
$\Phi$	Densidade de deformação elástica por unidade de volume.
$\tilde{L}$	Funcional lagrangeano.
$J\left(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_{\theta}\right)$	Função objetivo.
$V$	Volume.
$P$	Perímetro.
$\mathcal{P}_{ad}$	Conjunto de formas admissíveis.
$h(\phi)$	Função Heaviside.
$\delta_{\Gamma}(\phi)$	Função delta de Dirac.
$T_{\tau}(\vec{x})$	Mapeamento.
$\vec{V}(\vec{x})$	Campo de velocidade.



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	1
1.1	Objetivos .....	2
1.1.1	Objetivo geral .....	2
1.1.2	Objetivos específicos .....	2
1.2	Revisão bibliográfica .....	3
1.2.1	Otimização de topologia e forma .....	3
1.2.2	O método <i>level set</i> .....	4
1.3	Organização do trabalho .....	5
2	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA ESTRUTURAL .....	7
2.1	Definição da formulação forte do problema estrutural .....	7
2.1.0.1	Derivação da formulação fraca do problema estrutural .....	8
2.2	Derivação da formulação variacional do problema estrutural .....	9
2.2.1	Lei de Hooke generalizada .....	10
2.2.2	Definição da densidade de deformação elástica .....	11
2.2.3	Formulação do princípio da mínima energia potencial total .....	12
2.2.4	Formulação variacional .....	14
2.2.5	Teoria de placa de Mindlin .....	15
2.2.5.1	Hipóteses cinemáticas: .....	15
2.2.6	Definição do problema de minimização .....	17
2.3	Formulação do problema de ponto de sela .....	22
3	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO .....	29
3.1	Formulação do problema de otimização .....	29
3.2	Formulação do problema com o método <i>level set</i> .....	32
3.2.1	Problema de minimização com restrições de desigualdade .....	33
3.3	Formulação do problema de minimização sem restrições .....	34
3.3.1	Análise da sensibilidade de forma .....	36
3.4	Abordagem Euleriana para a otimização de forma .....	46
3.4.1	Derivação da equação de Hamilton-Jacobi .....	46
3.4.1.1	Formulação <i>level set</i> .....	49
3.5	Principais vantagens do método <i>level set</i> para otimização de forma .....	50

4	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA .....	53
4.1	Solução da equação <i>level set</i> .....	53
4.1.1	Descrição do método <i>level set</i> .....	55
4.2	Solução da equação de transporte <i>level set</i> pelo método SDEFGM .....	56
4.2.1	Processo de estabilização via <i>Stream Line Petrov-Galerkin method</i> .....	56
4.2.2	Discretização da equação incremental de Hamilton-Jacobi .....	58
4.2.2.1	Discretização da equação incremental de Hamilton-Jacobi .....	60
4.2.2.2	Montagem do problema linear global . . .	61
4.3	Equação de reinicialização .....	62
4.3.1	Derivação da forma fraca da equação incremental . .	64
4.3.1.1	Montagem do problema linear global .....	66
4.4	Discretização da equação de estado .....	66
4.4.1	Formulação do problema de estado .....	66
4.5	Discretização do problema pelo método de Galerkin livre de elementos .....	68
4.5.1	Discretização espacial .....	68
4.5.2	Derivação das equações discretas associadas ao modelo da placa de Mindlin .....	74
4.6	Algoritmo do problema de otimização .....	75
5	RESULTADOS NUMÉRICOS .....	77
5.1	Considerações gerais .....	77
5.2	Solução da equação de estado .....	77
5.2.1	Problema 1 .....	78
5.3	Análise de otimização .....	80
5.3.1	Problema 2 .....	82
5.3.2	Problema 3 .....	83
5.3.3	Problema 4 .....	89
5.3.4	Problema 5 .....	90
6	CONCLUSÕES.....	97
6.0.5	Sugestões para trabalhos futuros .....	97
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	99
	Apêndice A – Compostos laminados .....	105

A.1	Propriedades da lâmina . . . . .	105
A.2	Comportamento do laminado . . . . .	108
A.3	Estado plano de tensões . . . . .	112
A.4	Esforços e deformações generalizadas em placas de Mindlin . . . . .	115
Apêndice B	– Placa isotrópica . . . . .	121
B.1	Determinação da equação constitutiva . . . . .	121
Apêndice C	– Análise da sensibilidade . . . . .	125
C.1	Derivada material . . . . .	125
C.1.1	Mudança de domínio e velocidade de deformação . . . . .	125
C.2	Teoremas importantes . . . . .	127
Apêndice D	– Método de Galerkin livre de elementos . . . . .	139
D.1	Aproximação por mínimos quadrados móveis . . . . .	139
D.2	Funções peso . . . . .	141
D.3	Tipos de funções peso . . . . .	143



## 1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos a humanidade tem procurado obter o melhor desempenho possível nas diversas atividades em todos os campos da vida cotidiana; desde o pequeno agricultor que com seu trabalho busca obter uma boa colheita, até as grandes empresas de aviação que procuram oferecer uma viagem confortável e de baixo custo a milhares de pessoas. O denominador comum destes exemplos é a contínua procura do desempenho ótimo de seu trabalho.

O desenvolvimento, projeto e a fabricação de componentes especialmente no contexto industrial freqüentemente levanta questões relativas à decisões que devem ser tomadas visando a melhoria da qualidade e do desempenho dos componentes, sem que certos limites sejam ultrapassados. Estas questões acarretam, eventualmente, na formulação de problemas de otimização sujeitos a restrições. No contexto da mecânica estrutural, com o objetivo de solucionar estes problemas de projeto, surgiu uma nova área, no âmbito da Engenharia Assistida por Computador, comumente chamada de otimização estrutural (ESCHENAUER; OLHOFF, 2001).

No campo da engenharia estrutural o procedimento consiste basicamente na definição de uma função objetivo, na definição das variáveis de projeto e finalmente a definição das restrições tanto de igualdade como também de desigualdade. Estas restrições são impostas visando delimitar o domínio factível de projeto.

Muitas vezes o projeto envolve a criação de novos e sofisticados produtos, para os quais freqüentemente a intuição falha. O desenvolvimento de tais produtos devem ser naturalmente assistidos com a aplicação de ferramentas computacionais, baseadas em métodos científicos bem estabelecidos, visando a solução da equação de estado, da análise de sensibilidade e a solução do problema de otimização associado ao projeto ótimo de componentes (JUNIOR, 2003).

A otimização estrutural divide-se em: paramétrica, de forma e de topologia. Um problema típico de otimização paramétrica consiste na determinação das áreas ótimas das seções transversais das barras em uma estrutura treliçada visando a minimização da função objetivo. Por exemplo, o peso próprio, sujeito a restrições do tipo tensões e flexões máximas admissíveis. Neste contexto, o problema de otimização é definido em um espaço de dimensão finita, por exemplo, em  $R^n$ , no caso de  $n$  parâmetros. Por outro lado, em um problema de otimização de forma, o objetivo é encontrar a forma ótima deste domínio, i.e., a determinação do contorno ótimo do componente ou estrutura. Neste contexto o problema é definido em um espaço

de funções de dimensão infinita. Na otimização da topologia o problema também é definido em um espaço de funções, porém, além de definir a forma ótima da estrutura permite também a introdução de cavidades, mudando desta forma as propriedades da topologia do domínio ótimo considerado.

A área de interesse deste trabalho concentra-se na aplicação de técnicas baseadas no método *level set* visando a otimização da forma e da topologia de componentes e estruturas, tendo como objetivo a minimização da flexibilidade (*compliance*) de placas planas sujeitas a restrições de volume e perímetro. O método *level set*, capaz de simular e analisar movimentos de curvas em diferentes cenários físicos, possibilita a descrição da evolução do domínio inicial até o domínio ótimo da estrutura. Este método, (OSHER; SETHIAN, 1988), apóia-se na idéia de representar uma determinada curva (ou contorno de uma superfície)  $\partial\Omega$  como a curva de nível zero (zero *level set*) de uma função  $\phi$  de dimensão maior (denominada função *level set*).

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivo geral

Propor o desenvolvimento teórico e computacional visando o desenvolvimento de um código para a otimização da forma e da topologia de placas planas tendo como objetivo a minimização da flexibilidade da placa sujeita a restrições de volume e perímetro.

### 1.1.2 Objetivos específicos

- Revisar a bibliografia e artigos científicos relacionados com a otimização de forma e topologica.
- Elaborar um algoritmo implícito e sua implantação na plataforma computacional já existente no GMAC. A finalidade do software desenvolvido é simular o processo de otimização da forma e da topologia de placas planas submetidas a diferentes situações de carregamento.
- Testar exemplos e comparar os resultados numéricos obtidos com os encontrados com a literatura.



## 1.2 Revisão bibliográfica

### 1.2.1 Otimização de topologia e forma

O objetivo da otimização topológica consiste na determinação da forma e da topologia ótima de componentes ou estruturas, obtendo desta forma a geometria ótima. O problema matemático associado à otimização topológica pode ser formulado em termos contínuos, em um espaço de funções, ou em termos discretos, em  $R^n$ .

As abordagens mais comuns de otimização topológica são as baseadas na escolha da densidade como variável de projeto, tais como as empregadas nos métodos de homogeneização e métodos SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalty*). A outra classe importante de abordagens da otimização topológica usa uma descrição implícita do contorno via introdução de uma função escalar, de maior dimensão, visando a parametrização da superfície do componente ou da estrutura, tal como propõe o método *level set* (DIJK et al., 2013).

A teoria da homogeneização é utilizada para descrever as propriedades efetivas do material composto, o qual é caracterizado por ter uma microestrutura parametrizada modelada localmente pelo tensor constitutivo do material. Esta parametrização relaxa o problema de otimização, garantindo um espaço de solução mais abrangente e fechado, além de tomar o problema mais tratável computacionalmente. Para tanto, cada ponto do domínio discretizado por elementos finitos, é constituído por um material composto gerado pela repetição periódica de uma microestrutura. A variação dos parâmetros durante o processo de otimização permite a representação final de pontos com material sólido, pontos com vazios e pontos com materiais intermediários (COUTINHO, 2006). Como exemplos citamos os trabalhos de: (BENDSØE; KIKUCHI, 1988), (SUZUKI; KIKUCHI, 1991) e (ALLAIRE et al., 1997).

Na formulação baseada em material intermediário (SIMP), o modelo constitutivo do material intermediário (artificial) é definido por uma função paramétrica  $\rho$ , associada à densidade do material. O material sólido é representado por  $\rho = 1$  e o vazio por  $\rho = 0$ . Desta forma, a densidade associada a cada ponto do domínio é utilizada para a determinação do tensor constitutivo  $C^*(\rho)$  do material, sendo esta a variável de projeto que equivale à relaxação do problema de otimização topológica (JUNIOR, 2004). Como exemplos temos os trabalhos: (BENDSØE, 1989) e (ZHOU; ROZVANY, 1991).

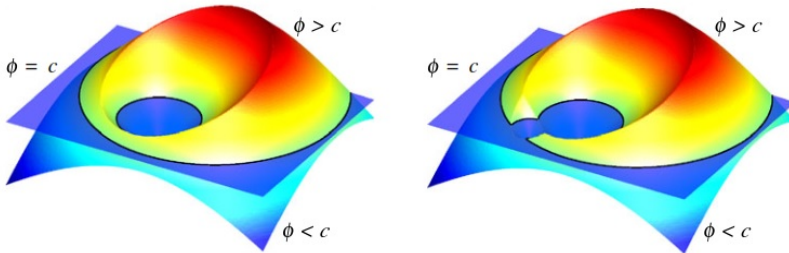
### 1.2.2 O método level set

O método *level set* (LSM) é uma técnica numérica para o monitoramento de interfaces e formas. A vantagem do LSM é poder realizar cálculos numéricos envolvendo curvas e superfícies em uma malha cartesiana fixa, caracterizando uma abordagem Euleriana. Além disso, LSM faz com que seja muito fácil de seguir formas que mudam de topologia. Por exemplo, quando uma forma se divide em duas, desenvolve furos, ou o inverso dessas operações. Todos estes aspectos fazem com que o método *level set* seja uma grande ferramenta para a modelagem de domínios que variam no tempo (GEORGIOS, 2010).

Em otimização estrutural o problema de duas fases material-vazio é o caso mais simples e mais frequentemente tratado. Dada uma função *level set*  $\phi$ , o LSM comumente define o domínio material  $\Omega$ , o domínio vazio  $D \setminus \Omega$  e a interface de material  $\Gamma$  dentro do domínio fixo de projeto  $D$  como:

$$\begin{cases} \phi(X) > 0 \iff X \in \Omega \text{ (material)} \\ \phi(X) = 0 \iff X \in \Gamma \text{ (interface)} \\ \phi(X) < 0 \iff X \in (D \setminus \Omega) \text{ (vazio);} \end{cases} \quad (1.1)$$

sendo  $X$  um ponto do domínio de projeto. Alterando a função *level set* altera-se a forma e possivelmente a topologia do domínio do material  $\Omega$ . No caso de domínios em  $R^2$ , são ilustradas na Figura 1.1, exemplos da função *level set*  $\phi$  definindo o domínio de material correspondente,  $\Omega$ , antes e depois de uma atualização das variáveis de projeto, em um procedimento do tipo busca de linha.



**Figura 1.1:** Um exemplo da função level set  $\phi$  e domínio  $\Omega$  antes e depois de uma atualização de desenho (DIJK et al., 2013).

O conceito de LSM foi desenvolvido por Osher e Sethian para modelar as fronteiras móveis (OSHER; SETHIAN, 1988). O conceito de usar uma descrição de geometria baseado no LSM para otimização topológica foi sugerido por Haber e Bendsøe (HABER; BENDSØE, 1998).

Osher e Santosa (OSHER; SANTOSA, 2001), Allaire (ALLAIRE; JOUVE; TOADER, 2004) e Wang (WANG; WANG; GUO, 2003) lançaram a ideia baseada no LSM na otimização estrutural baseada na sensibilidade de forma.

### **1.3 Organização do trabalho**

Este trabalho está dividido em cinco capítulos: introdução, definição do problema estrutural, definição do problema de otimização, implementação numérica e resultados numéricos e conclusões.

No primeiro capítulo é apresentada uma abordagem geral do trabalho, os objetivos e a revisão bibliográfica.

O capítulo dois apresenta a definição do problema estrutural: a formulação forte; a formulação fraca e variacional do problema estrutural; a formulação do problema de minimização e a formulação variacional fraca do problema da placa de Mindlin.

O capítulo três apresenta a definição do problema de otimização estrutural; a análise de sensibilidade de forma; a abordagem Euleriana para a otimização de forma e topológica.

O capítulo quatro apresenta a implementação numérica do problema de otimização; a solução da equação de Hamilton-Jacobi; a solução da equação de reinicialização; a discretização da equação de estado, descrevendo o problema estrutural da placa de Mindlin.

O capítulo cinco apresenta os resultados numéricos obtidos na resolução de um conjunto de problemas de otimização topológica e de forma, tendo como objetivo a verificação e validação do algoritmo de otimização proposto. Neste capítulo são apresentadas também as conclusões obtidas após a realização do trabalho.



## 2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA ESTRUTURAL

Neste capítulo é apresentada a formulação forte, fraca e variacional do problema estrutural. Alguns conceitos importantes são também apresentados, tais como: a lei de Hooke; a densidade de energia de deformação; o princípio da mínima energia do potencial total; e a teoria de placa de Mindlin. Estes conceitos são importantes para a formulação do problema de minimização e da formulação do problema de ponto de sela, utilizado na formulação do problema de otimização de placas.

### 2.1 Definição da formulação forte do problema estrutural

Inicialmente será descrito o problema clássico da elasticidade linear o qual será posteriormente modificado pela introdução de hipóteses cinemáticas e constitutivas, objetivando a formulação do problema clássico de placas de Mindlin.

Seja  $\Omega \subset R^d$  um conjunto aberto limitado ocupado por um material isotrópico, homogêneo, linear e elástico cujo tensor constitutivo de quarta ordem é dado por  $\mathbb{D}$ . A lei de Hooke generalizada que fornece o tensor tensão  $\sigma$  e o tensor deformação  $\varepsilon$ , neste caso pode ser descrita por:

$$\sigma = \mathbb{D}\varepsilon = 2\bar{\mu}\varepsilon + \bar{\lambda}\text{tr}(\varepsilon)\mathbf{I} \quad (2.1)$$

sendo  $\bar{\mu}$  e  $\bar{\lambda}$  as constantes elásticas de Lamé (MALVERN, 1969). Considera-se que a fronteira de  $\Omega$  é decomposta em três partes disjuntas:

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D, \quad (2.2)$$

sendo as condições de contorno de Dirichlet aplicadas sobre  $\Gamma_D$ , e condições de contorno de Neumann aplicadas sobre  $\Gamma_0 \cup \Gamma_N$ , sendo  $\Gamma_0$  a parte do contorno sujeita a uma tração nula prescrita. De um modo geral, pode-se considerar variável os contornos  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$  com relação ao processo de otimização, embora seja possível fixar alguns destes contornos. Aqui, por simplicidade, considera-se que  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$  sejam fixos, i.e., que apenas  $\Gamma_0$  será permitido variar de forma no processo de otimização.

Denota-se  $\vec{b}$  o vetor que representa as forças de corpo prescritas, por unidade de volume, e  $\vec{t}$  as trações prescritas em  $\Gamma_N$ . Assim, o problema clássico da elasticidade linear pode então ser formulado como:

Determinar o campo de deslocamentos  $\vec{u}$  definido em  $\Omega$  solução de:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\sigma(\vec{u})] + \vec{b} &= 0 \text{ em } \Omega \\ \text{sujeito às condições de contorno:} \\ \vec{u} &= \vec{0} \text{ em } \Gamma_D \\ \sigma(\vec{u}) \vec{n} &= \vec{0} \text{ em } \Gamma_0 \\ \text{e} \\ \sigma(\vec{u}) \vec{n} &= \vec{t} \text{ em } \Gamma_N, \end{aligned} \quad (2.3)$$

sendo  $\sigma = \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u})$  o tensor tensão e  $\varepsilon(\vec{u})$  o tensor deformação infinitesimal, dado por

$$\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left( \nabla_{\vec{x}} \vec{u} + [\nabla_{\vec{x}} \vec{u}]^T \right). \quad (2.4)$$

### 2.1.0.1 Derivação da formulação fraca do problema estrutural

A fim de obter a forma fraca associada ao problema na Eq. (2.3), introduz-se inicialmente o conjunto dos deslocamentos admissíveis (REDDY, 2006),  $\mathbf{V}_0$ , definido por

$$\mathbf{V}_0 = \left\{ \vec{u} \mid \vec{u} \in H^1(\Omega)^d, \vec{u} = \vec{0} \text{ em } \Gamma_D \right\}, \quad (2.5)$$

e o conjunto das variações admissíveis,  $\mathbf{Var}_0$ , definido por

$$\mathbf{Var}_0 = \left\{ \vec{w} \mid \vec{w} \in H^1(\Omega)^d, \vec{w} = \vec{0} \text{ em } \Gamma_D \right\}. \quad (2.6)$$

Por simplicidade, considera-se que a condição de contorno essencial seja dada por  $\vec{u} = \vec{0}$  em  $\Gamma_D$ , o que implica, como consequência, que  $\mathbf{V}_0 = \mathbf{Var}_0$ .

A partir de agora, denota-se ambos os subespaços por  $\mathbf{V}_0$ , ou seja

$$\mathbf{V}_0 \equiv \mathbf{V}_0 = \mathbf{Var}_0 \subset H^1(\Omega)^d. \quad (2.7)$$

A fim de obter a forma fraca da equação de equilíbrio, considera-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \operatorname{div} [\sigma(\vec{u})] + \vec{b} \right\} \cdot \vec{w} \, d\Omega &= 0, \text{ para todo } \vec{w} \in \mathbf{V}_0 \\ \text{em que} \\ \sigma(\vec{u}) &= \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Porém,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma^T \vec{w}) &= \operatorname{div}(\sigma) \cdot \vec{w} + \sigma \cdot \varepsilon(\vec{w}) \\ \text{e} \\ \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma^T \vec{w}) d\Omega &= \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{w} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.9)$$

o que acarreta em

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(\vec{u})) \cdot \vec{w} d\Omega = \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{w} d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(\vec{w}) d\Omega. \quad (2.10)$$

Introduzindo a Eq. (2.10) na Eq. (2.8) tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{w}) d\Omega &= \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{w} \cdot \vec{t} d\Gamma, \text{ para todo } \vec{w} \in \mathbf{V}_0 \\ \text{em que} \\ \sigma(\vec{u}) &= \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Definindo-se a forma bilinear  $a(\Omega, \vec{u}, \vec{w})$  por

$$a(\Omega, \vec{u}, \vec{w}) = \int_{\Omega} \sigma(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{w}) d\Omega, \quad (2.12)$$

e a forma linear  $l(\Omega, \vec{w})$  por

$$l(\Omega, \vec{w}) = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{w} \cdot \vec{t} d\Gamma. \quad (2.13)$$

Assim, pode-se formular a forma fraca do problema da elasticidade linear como:

Determinar  $\vec{u} \in \mathbf{V}_0$  tal que:

$$\begin{aligned} a(\Omega, \vec{u}, \vec{w}) &= l(\Omega, \vec{w}), \quad \forall \vec{w} \in \mathbf{V}_0 \\ \text{sendo} \\ a(\Omega, \vec{u}, \vec{w}) &= \int_{\Omega} \sigma(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{w}) d\Omega \\ \text{e} \\ l(\Omega, \vec{w}) &= \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{w} \cdot \vec{t} d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.14)$$

## 2.2 Derivação da formulação variacional do problema estrutural

Nesta seção, por simplicidade, considera-se apenas princípios variacionais aplicados a materiais elásticos lineares sujeitos à cargas estáticas (REDDY, 2006).

Portanto, os problemas estão restritos a deslocamentos e deformações

infinitesimais; e a resposta material satisfaz a lei de Hooke generalizada, para a elasticidade linear.

### 2.2.1 Lei de Hooke generalizada

A equação constitutiva para um material elástico linear pode ser expressa, de acordo com a lei de Hooke generalizada, como:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \mathbb{D}_{ijkl} \epsilon_{kl} \\ \text{ou, na forma compacta, conforme} \\ \sigma &= \mathbb{D} \epsilon\end{aligned}\tag{2.15}$$

sendo  $\mathbb{D}$  o tensor de quarta ordem constitutivo com as seguintes propriedades:

(i)  $\mathbb{D}$  é simétrico, ou seja:

$$\mathbb{D}A.B = A.\mathbb{D}B,\tag{2.16}$$

para qualquer tensor de segunda ordem simétrico  $A$  e  $B$ , ou seja  $A$  e  $B \in \mathbf{L}$ , em que  $\mathbf{L}$  denota o conjunto das transformações lineares simétricas de  $\mathbb{V}$  em  $\mathbb{V}$ . Em componentes, temos

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{ijkl} A_{kl} B_{ij} &= A_{kl} \mathbb{D}_{klij} B_{ij} \quad \forall A \text{ e } B \in \mathbf{L} \\ \text{ou seja,} \\ \mathbb{D}_{ijkl} &= \mathbb{D}_{klij}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

(ii)  $\mathbb{D}$  é positivo definido, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbb{D}A.A &\geq \mathbf{0} \quad \forall A \in \mathbf{L} \\ \text{e} \\ \mathbb{D}A.A &= 0 \Leftrightarrow A = 0.\end{aligned}\tag{2.18}$$

No caso particular de materiais isotrópicos, o tensor constitutivo de quarta ordem pode ser expresso por:

$$\mathbb{D} = 2\bar{\mu} \mathbb{I} + \bar{\lambda} (I \otimes I),\tag{2.19}$$

sendo  $\bar{\mu}$  e  $\bar{\lambda}$  as constantes elásticas de Lamé,  $I$  o tensor identidade de segunda ordem e  $\mathbb{I}$  o tensor identidade de quarta ordem, com relação aos elementos de



L. Em componentes:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{D}_{ijkl} &= 2\bar{\mu} \mathbb{I}_{ijkl} + \bar{\lambda} (I \otimes I)_{ijkl} \\
 \text{sendo} \\
 \mathbb{I}_{ijkl} &= \frac{1}{2} \{ \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \} \\
 \text{e} \\
 (I \otimes I)_{ijkl} &= \delta_{ij} \delta_{kl}.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

O tensor tensão, para o caso de material isotrópico, elástico e linear, pode ser calculado como:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \mathbb{D} \varepsilon \\
 &= 2\bar{\mu} \mathbb{I} \varepsilon + \bar{\lambda} (I \cdot \varepsilon) I \\
 &= 2\bar{\mu} \varepsilon + \bar{\lambda} \text{tr}(\varepsilon) I.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

### 2.2.2 Definição da densidade de deformação elástica

Define-se a densidade de deformação elástica por unidade de volume (REDDY, 2002),  $\Phi$ , como:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\vec{u}) &= \frac{1}{2} \sigma(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u}) \\
 \text{ou seja} \\
 \Phi(\varepsilon(\vec{u})) &= \frac{1}{2} \mathbb{D} \varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u}).
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Definindo-se  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \left( \vec{\vec{u}} \right)$  e  $\varepsilon = \varepsilon(\vec{u})$ , juntamente com a expansão de  $\Phi(\tilde{\varepsilon})$  em uma série de Taylor em  $\varepsilon$ , obtém-se

$$\Phi(\tilde{\varepsilon}) = \Phi(\varepsilon) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon} \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon} (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon). \tag{2.23}$$

Agora,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \mathbb{D}_{ijrs} \varepsilon_{rs} = \sigma_{ij}, \tag{2.24}$$

e

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \mathbb{D}_{ijkl} \tag{2.25}$$

o que implica em

$$\Phi(\tilde{\varepsilon}) = \Phi(\varepsilon) + \sigma \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) + \frac{1}{2} \mathbb{D} (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon). \tag{2.26}$$

Visto que  $\mathbb{D}$  é positivo definido, i.e.,

$$\mathbb{D}(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \geq 0. \quad (2.27)$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{\varepsilon}) &\geq \Phi(\varepsilon) + \sigma \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \\ \text{ou seja} \\ \sigma &\in \partial\Phi(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.28)$$

No entanto, como

$$\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T), \quad (2.29)$$

pode-se expressar a densidade de deformação elástica, em termos do campo de deslocamento, como

$$\Phi(\vec{u}) = \frac{1}{2} \mathbb{D} \varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u}) \quad (2.30)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{u}) &\geq \Phi(\vec{u}) + \mathbb{D} \varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u} - \vec{u}) \\ \text{na qual a igualdade é alcançada por} \\ \vec{u} &= \vec{u}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

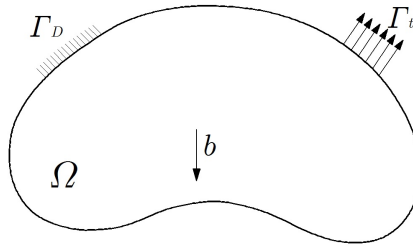
### 2.2.3 Formulação do princípio da mínima energia potencial total

Seja o corpo elástico ocupando o domínio  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ , descrita na Figura 2.1, sendo  $\Omega$  um conjunto aberto com contorno  $\partial\Omega$  e sujeito a um sistema de cargas prescritas:  $\vec{b}$ , relativa à uma força de corpo prescrita e  $\vec{t}$  relativa à uma tração prescrita em  $\Gamma_t$ ,  $\Gamma_t = \Gamma_N \cup \Gamma_0$ ; (FUNG, 1965) e (WASHIZU, 1975). O contorno  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_t$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_t = \emptyset$  sendo  $\Gamma_D$  a parte da fronteira com condições essenciais prescritas,  $\vec{u} = \vec{0}$ , e  $\Gamma_t$  a parte da fronteira com condições naturais prescritas,  $\sigma \vec{n} = \vec{t}$ .  $\Gamma_t$  é por sua vez cecomposto como  $\Gamma_t = \Gamma_N \cup \Gamma_0$ ,  $\Gamma_N \cap \Gamma_0 = \emptyset$ , sendo

$$\begin{aligned} \sigma \vec{n} &= \vec{t} \text{ em } \Gamma_N \\ \text{e} \\ \sigma \vec{n} &= 0 \text{ em } \Gamma_0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Agora, a partir da Eq. (2.14) pode-se formular o problema fraco associado à elasticidade linear clássica como: Determinar  $\vec{u} \in \mathbf{V}_0$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{w}) \, d\Omega &= \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{w} \, d\Gamma, \quad \forall \vec{w} \in \mathbf{V}_0 \\ \text{ou seja} \\ \int_{\Omega} \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{w}) \, d\Omega &= \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{w} \, d\Gamma, \quad \forall \vec{w} \in \mathbf{V}_0. \end{aligned} \quad (2.33)$$



**Figura 2.1:** Corpo elástico sujeito a cargas prescritas (JUNIOR, 2003).

Note que, para qualquer elemento arbitrário  $\vec{u} \in \mathbf{V}_0$ , temos

$$\vec{w} = \left( \vec{\vec{u}} - \vec{u} \right) \in \mathbf{V}_0. \quad (2.34)$$

Por conseguinte, a substituição da Eq. (2.34) na Eq. (2.33) produz:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{\vec{u}} - \vec{u}) \, d\Omega &= \int_{\Omega} \vec{b} \cdot (\vec{\vec{u}} - \vec{u}) \, d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot (\vec{\vec{u}} - \vec{u}) \, d\Gamma, \quad \forall \vec{\vec{u}} \in \mathbf{V}_0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

sendo

$$\boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) = \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u}).$$

No entanto, a partir das propriedades de densidade de deformação elástica na Eq. (2.31), deriva-se:

$$\Phi(\vec{\vec{u}}) - \Phi(\vec{u}) \geq \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{\vec{u}} - \vec{u}), \quad \forall \vec{\vec{u}} \in \mathbf{V}_0. \quad (2.36)$$

o que implica

$$\int_{\Omega} \Phi(\vec{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \Phi(\vec{u}) d\Omega \geq \int_{\Omega} \mathbb{D}\mathcal{E}(\vec{u}) \cdot \mathcal{E}(\vec{u} - \vec{u}) d\Omega, \quad \forall \vec{u} \in \mathbf{V}_0. \quad (2.37)$$

Substituindo a Eq. (2.35) na Eq. (2.37) obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi(\vec{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{u} d\Gamma \geq \int_{\Omega} \Phi(\vec{u}) d\Omega \\ - \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{u} d\Gamma, \quad \forall \vec{u} \in \mathbf{V}_0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde

$$\Phi(\vec{u}) = \frac{1}{2} \mathbb{D}\mathcal{E}(\vec{u}) \cdot \mathcal{E}(\vec{u}).$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \pi(\vec{u}) \geq \pi(\vec{u}), \quad \forall \vec{u} \in \mathbf{V}_0 \\ \text{sendo} \\ \pi(\vec{u}) = \int_{\Omega} \Phi(\vec{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{u} d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.39)$$

### 2.2.4 Formulação variacional

O problema variacional pode ser formulado como:  $\vec{u} \in \mathbf{V}_0$  é solução do problema de valor de contorno, dado na Eq. (2.3) ou Eq. (2.14), se:

$$\begin{aligned} \vec{u} = \arg \min \pi(\vec{u}), \quad \forall \vec{u} \in \mathbf{V}_0 \\ \text{sendo} \\ \pi(\vec{u}) = \int_{\Omega} \Phi(\vec{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{u} d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.40)$$

O resultado da Eq. (2.40) nos permite concluir que: dentre todos os campos de deslocamentos admissíveis  $\vec{u} \in \mathbf{V}_0$ , o que minimiza a energia potencial total  $\pi(\vec{u})$  em  $\mathbf{V}_0$  é o que soluciona o problema de valor de contorno, dado na Eq. (2.3) ou Eq. (2.14).

Note porém, que o conjunto  $\mathbf{V}_0 = \left\{ \vec{u} \mid \vec{u} \in H^1(\Omega)^d, \vec{u} = \vec{0} \text{ em } \Gamma_D \right\}$  requer que  $\vec{u} = \vec{0}$  em  $\Gamma_D$ . Essa restrição pode ser removida do domínio factível do problema de mínimo através da imposição da condição

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ em } \Gamma_D \quad (2.41)$$

como uma restrição de igualdade, no problema de minimização. Neste con-

texto, o problema de minimização na Eq. (2.40) pode ser redefinido em termos do subespaço  $\mathbf{V} = \left\{ \vec{u} \mid \vec{u} \in H^1(\Omega)^d \right\}$  de modo que  $\vec{u} \in \mathbf{V}$  é a solução para o problema de valor de contorno se

$$\begin{aligned}
 \vec{u} &= \arg \min_{\vec{u} \in \mathbf{V}} \pi \left( \vec{u} \right) \\
 &\text{sujeito à restrição} \\
 \vec{h} \left( \vec{u} \right) &\equiv \vec{u} = \vec{0} \text{ em } \Gamma_D \\
 &\text{sendo} \\
 \pi \left( \vec{u} \right) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \left( \vec{u} \right) : \varepsilon \left( \vec{u} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{u} d\Gamma \\
 &\text{em que} \\
 \sigma \left( \vec{u} \right) &= \mathbb{D} \varepsilon \left( \vec{u} \right).
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

### 2.2.5 Teoria de placa de Mindlin

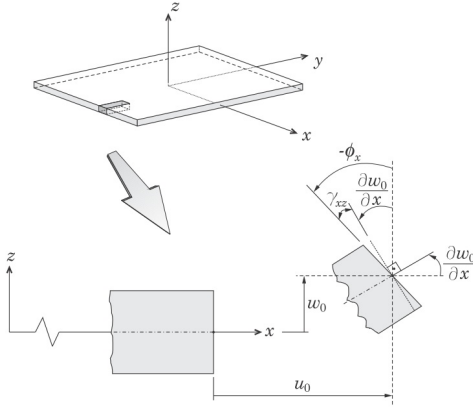
A teoria clássica de placas de Kirchhoff-Love supõe que uma seção reta perpendicular à superfície média da placa antes do carregamento permanece reta e perpendicular à superfície média da placa após o carregamento. A teoria de primeira ordem de Mindlin, difere da teoria de Kirchhoff-Love por admitir que, na configuração deformada, a seção reta não permanece necessariamente perpendicular à superfície média da placa após o carregamento, acarretando como consequência deformações cisalhantes transversais não nulas ao longo da espessura (BELO, 2006). Na Figura 2.2 são ilustradas as hipóteses cinemáticas do modelo de primeira ordem proposto por Mindlin.

Neste trabalho é abordada a Teoria de Primeira Ordem (FSDT *First-order Shear Deformation Theory*), cuja hipótese cinemática é a utilizada pela teoria de placa de Mindlin, que prevê as solitações de cisalhamento transversal; (TELES, 2007) e (REDDY, 2004), i.e., considera-se que o corpo  $\Omega$  representa uma placa fina em que o efeito da tensão cisalhante transversal é considerado (teoria de placas semi-espessas).

#### 2.2.5.1 Hipóteses cinemáticas:

(i) A teoria de Mindlin considera que o campo de deslocamento é dado por:

$$\vec{u}(x,y,z) = \vec{u}_0(x,y) - z \vec{\theta}(x,y), \tag{2.43}$$



**Figura 2.2:** Configuração da placa deformada e indeformada segundo a teoria de primeira ordem (BELO, 2006).

onde

$$\begin{aligned}\vec{u}_o(x, y) &= u_o(x, y)\vec{e}_x + v_o(x, y)\vec{e}_y + w_o(x, y)\vec{e}_z \\ \vec{\theta}(x, y) &= -\theta_y(x, y)\vec{e}_x + \theta_x(x, y)\vec{e}_y.\end{aligned}\tag{2.44}$$

De forma análoga

$$\vec{u}(x, y, z) = [u_o(x, y) + z\theta_y(x, y)]\vec{e}_x + [v_o(x, y) - z\theta_x(x, y)]\vec{e}_y + w_o(x, y)\vec{e}_z,\tag{2.45}$$

i.e.

$$\vec{u}(x, y, z) = U(x, y)\vec{e}_x + V(x, y)\vec{e}_y + W(x, y)\vec{e}_z,\tag{2.46}$$

na qual

$$\begin{aligned}U(x, y) &= u_o(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ V(x, y) &= v_o(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ W(x, y) &= w_o(x, y).\end{aligned}\tag{2.47}$$

(ii) Considera-se que a tensão normal  $\sigma_{zz} \simeq 0$  e que as lâminas estão sujeitas a um estado plano de tensão. São incorporadas também no modelo o efeito das tensões cisalhantes transversais.

As componentes do tensor deformação infinitesimal podem ser expressas por

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial V}{\partial y} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial W}{\partial z},\end{aligned}\tag{2.48}$$

i.e.

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= 2\epsilon_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \text{e} \\ \gamma_{yz} &= 2\epsilon_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}.\end{aligned}\tag{2.49}$$

Substituindo as componentes do campo de deslocamento, definidas na Eq. (2.47), nas equações acima tem-se:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \epsilon_{xx}^o + z \kappa_{xx} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \epsilon_{yy}^o + z \kappa_{yy} \\ \epsilon_{zz} &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \left[ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right] = \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] + z \left[ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right] \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^o + z \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = -\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial y}.\end{aligned}\tag{2.50}$$

### 2.2.6 Definição do problema de minimização

Para a determinação do princípio variacional associado ao problema da placa de Mindlin, parte-se do princípio variacional associado à formulação clássica da elasticidade geral a qual é posteriormente modificada pela imposição das hipóteses cinemáticas e constitutivas referentes ao modelo de Mindlin. O princípio variacional associado ao problema de valor de contorno, vide Eq. (2.3) ou (2.14), é formulado como:

$$\begin{aligned}\text{Determinar } \vec{u} \in \mathbf{V}, \mathbf{V} &= \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} \in H^1(\Omega)^d \right\}, \text{ tal que} \\ \min_{\vec{w} \in \mathbf{V}} \pi(\vec{w}) \\ \text{sujeito a } \vec{h}(\vec{w}) &= \vec{0} \text{ em } \Gamma_D \\ \text{sendo } \pi(\vec{w}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \cdot \epsilon(\vec{w}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{w} \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{w} \, d\Gamma \\ \text{e } \vec{h}(\vec{w}) &= \vec{w} \text{ com } \sigma = \mathbb{D}\epsilon(\vec{w}).\end{aligned}\tag{2.51}$$

Os termos do funcional  $\pi(\vec{w})$  são modificados, pela incorporação das hipóteses de Mindlin, da seguinte forma:

- O termo (1), definido por:

$$(1) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(\vec{w}) \, d\Omega,$$

pode ser expresso, pela introdução da Eq. (2.50), como

$$(1) = \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \sigma_{xx} [\varepsilon_{xx}^o + z \kappa_{xx}] + \sigma_{yy} [\varepsilon_{yy}^o + z \kappa_{yy}] + \sigma_{xy} [\gamma_{xy}^o + z \kappa_{xy}] \right. \\ \left. + k \sigma_{xz} \gamma_{xz} + k \sigma_{yz} \gamma_{yz} \right\} dz dA, \quad (2.52)$$

em que  $k = \frac{5}{6}$  é chamado de fator de correção do cisalhamento transversal.

Definindo os esforços generalizados como:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz, & N_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} dz, \\ N_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz, & Q_{xz} &= k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz, \\ M_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xx} dz, & M_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{yy} dz, \\ M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xy} dz, & Q_{yz} &= k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz, \end{aligned} \quad (2.53)$$

visualizados na Figura 2.3.

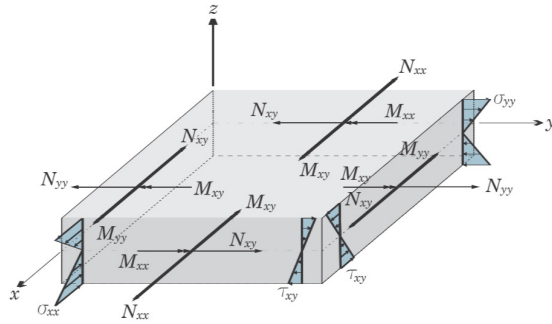
Assim, tem-se:

$$(1) = \frac{1}{2} \int_A \left\{ N_{xx} \varepsilon_{xx}^o + M_{xx} \kappa_{xx} + N_{yy} \varepsilon_{yy}^o + M_{yy} \kappa_{yy} \right. \\ \left. + N_{xy} \gamma_{xy}^o + M_{xy} \kappa_{xy} + Q_{xz} \gamma_{xz} + Q_{yz} \gamma_{yz} \right\} dA. \quad (2.54)$$

A Eq. (2.54) pode se redefinir, como produto escalar pela introdução dos vetores: esforço generalizado  $\vec{M}$

$$\vec{M}^T = \{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz}\} \quad (2.55)$$





**Figura 2.3:** Esforços em placa plana (BELO, 2006).

e deformação generalizada  $\vec{\kappa}$

$$\vec{\kappa} = \{\epsilon_{xx}^o, \epsilon_{yy}^o, \gamma_{xy}^o, \kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\} \quad (2.56)$$

como

$$(1) = \frac{1}{2} \int_A \vec{M} \cdot \vec{\kappa} dA. \quad (2.57)$$

Supondo que a placa seja isotrópica ou de material compósito laminado, (ver Apêndice A e B), tem-se:

$$\vec{M} = [\mathbf{D}] \vec{\kappa}. \quad (2.58)$$

Como resultado, tem-se

$$\boxed{(1) = \frac{1}{2} \int_A \vec{M} \cdot \vec{\kappa} dA} \quad (2.59)$$

em que

$$\vec{M} = [\mathbf{D}] \vec{\kappa}.$$

- O termo (2), definido por

$$(2) = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u} d\Omega, \quad (2.60)$$

pode ser expresso, considerando o peso próprio  $\vec{b}$  constante em cada lâmina e dado por

$$\vec{b}^k = \rho^k \vec{g} = Cte, \quad (2.61)$$

como

$$\begin{aligned}
 (2) &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{b} \cdot [\vec{u}_o - z \vec{\theta}] dz dA \\
 &= \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k (h^{k+1} - h^k) \right\} \vec{g} \cdot \vec{u}_o dA \\
 &= \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k (h^{k+1} - h^k) \right\} \{g_x u_o + g_y v_o + g_z w_o\} dA,
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

i.e.

$$\boxed{(2) = \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k (h^{k+1} - h^k) \right\} \{g_x u_o + g_y v_o + g_z w_o\} dA} \tag{2.63}$$

em que  $(h^{k+1} - h^k)$  representa a espessura da  $k$ -ésima lâmina do compósito e  $\rho^k$  a sua densidade.

- O termo (3), definido por,

$$(3) = \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{u} d\Gamma, \tag{2.64}$$

pode ser expresso como

$$\int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{u} d\Gamma = \int_{\partial A_N} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{t} \cdot \vec{u} dz ds + \int_{A_N} q_o \vec{n} \cdot \vec{u}_o dA. \tag{2.65}$$

Na Eq. (2.65) considera-se:

1. Tração prescrita na face lateral do contorno da placa, representada pelo termo

$$\int_{\partial A_N} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{t} \cdot \vec{u} dz ds. \tag{2.66}$$

2. Distribuição de carregamento transversal, normal à superfície da placa, representada por

$$\begin{aligned}
 &\int_{A_N} q_o \vec{n} \cdot \vec{u}_o dA \\
 &\text{em que} \\
 &q_o = q_o(x, y) \text{ - é uma distribuição de pressão normal} \\
 &\text{à superfície média da placa,} \\
 &\text{e } \vec{n} = \vec{e}_z.
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Como resultado:

$$\begin{aligned}
 (3) &= \int_{\partial A_N} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{t} \cdot \vec{u} \, dz ds + \int_{A_N} q_o \vec{n} \cdot \vec{u}_o \, dA \\
 &= \int_{\partial A_N} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{t} \cdot [\vec{u}_o - z \vec{\theta}] \, dz ds + \int_{A_N} q_o \vec{n} \cdot \vec{u}_o \, dA \\
 &= \int_{\partial A_N} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{t} \cdot \vec{u}_o - z \vec{t} \cdot \vec{\theta} \, dz ds + \int_{A_N} q_o \vec{n} \cdot \vec{u}_o \, dA.
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Definindo os esforços generalizados prescritos, aplicados na borda do contorno da placa, como

$$\begin{aligned}
 \vec{N} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{t} \, dz \\
 \vec{M} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{t} z \, dz,
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

tem-se

$$(3) = \int_{\partial A_N} \left\{ \vec{N} \cdot \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \vec{\theta} \right\} ds + \int_{A_N} q_o \vec{n} \cdot \vec{u}_o \, dA, \tag{2.70}$$

em que  $\partial A_N$  representa a parte do contorno da superfície média da placa (borda) sujeita aos esforços  $\vec{N}$  e  $\vec{M}$  prescritos e  $q_o = q_o(x, y)$ .

Substituindo-se as Eq. (2.59), Eq. (2.63) e Eq. (2.70) na Eq. (2.51) tem-se:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{I}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) &= \frac{1}{2} \int_A [\mathbf{D}] \vec{\kappa} \cdot \vec{\kappa} \, dA - \int_A \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \right\} \vec{g} \cdot \vec{u}_o \, dA \\
 &\quad - \int_{\partial A_N} \left\{ \vec{N} \cdot \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \vec{\theta} \right\} ds - \int_{A_N} q_o \vec{n} \cdot \vec{u}_o \, dA.
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Uma vez incorporada as hipóteses da placa de Mindlin, obtém-se o princípio variacional associado à teoria de placa semi-espessa de Mindlin o

qual é formulado como:

Determinar  $(\vec{u}_o, \vec{\theta}) \in \mathbf{W}$ ,  $\mathbf{W} = \{(\vec{v}, \vec{\alpha}) \mid v_i \in H^1(\Omega) \text{ e } \alpha_i \in H^1(\Omega)\}$

solução de:  $\min_{(\vec{w}, \vec{\alpha}) \in \mathbf{W}} \mathfrak{S}(\vec{w}, \vec{\alpha})$

sujeito às restrições de igualdade:

$\vec{h}_{u_o}(\vec{w}) = \vec{w} = \vec{0}$  e  $\vec{h}_\theta(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha} = \vec{0}$  em  $\partial A_D$ ,

sendo:

$$\mathfrak{S}(\vec{w}, \vec{\alpha}) = \frac{1}{2} \int_A [\mathbf{D}] \vec{\kappa}(\vec{w}, \vec{\alpha}) \cdot \vec{\kappa}(\vec{w}, \vec{\alpha}) dA - \int_{\partial A_N} \left\{ \vec{N} \cdot \vec{w} - \vec{M} \cdot \vec{\alpha} \right\} ds \\ - \int_{A_N} q_o \vec{n} \cdot \vec{w} dA - \int_A \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \right\} \vec{g} \cdot \vec{w} dA$$

onde:

$$\vec{\kappa} = \{ \varepsilon_{xx}^o, \varepsilon_{yy}^o, \gamma_{xy}^o, \kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \}.$$

(2.72)

### 2.3 Formulação do problema de ponto de sela

Na maior parte dos casos, os problemas de engenharia apresentam algum tipo de restrição. Sendo assim, a idéia chave para aplicar as condições necessárias e suficientes para o problema de otimização com restrições e transformá-lo em um problema de otimização sem restrições. Uma forma de fazer esta transformação é através do funcional lagrangeano (COUTINHO, 2006).

Para o problema de minimização com restrições, descrito na Eq. (2.72), o funcional lagrangeano  $\tilde{L}$ ; (COUTINHO, 2006) e (RAVINDRAN; REKLAITIS; RAGSDALL, 2006), é dado por

$$\tilde{L}(\vec{w}, \vec{\alpha}, \vec{\mu}_{u_o}, \vec{\mu}_\theta) = \mathfrak{S}(\vec{w}, \vec{\alpha}) + \int_{\partial A_D} \vec{\mu}_{u_o} \cdot \vec{h}_{u_o}(\vec{w}) ds + \int_{\partial A_D} \vec{\mu}_\theta \cdot \vec{h}_\theta(\vec{\alpha}) ds. \quad (2.73)$$

O problema de ponto de sela associado ao problema de minimização com restrições de igualdade, em (2.72), é formulado como: Determinar  $(\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H}$ , com  $\mathbf{H} = \left\{ (\vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta) \mid \vec{\lambda}_{u_o} \in L^2(\Gamma_D)^d \text{ e } \vec{\lambda}_\theta \in L^2(\Gamma_D)^d \right\}$ , tal que

$$\tilde{L}(\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\mu}_{u_o}, \vec{\mu}_\theta) \leq \tilde{L}(\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta) \leq \tilde{L}(\vec{w}, \vec{\alpha}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta), \quad (2.74)$$

para todo  $(\vec{w}, \vec{\alpha}, \vec{\mu}_{u_o}, \vec{\mu}_\theta) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H}$ .

Seja  $(\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta)$  a solução do problema de ponto de sela. Então, da pri-

meira desigualdade na Eq. (2.74) temos

$$\check{L}(\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\mu}_{u_o}, \vec{\mu}_\theta) \leq \check{L}(\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta), \forall (\vec{\mu}_{u_o}, \vec{\mu}_\theta) \text{ em } \mathbf{H}, \quad (2.75)$$

i.e.

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) + \int_{\partial A_D} \vec{\mu}_{u_o} \cdot \vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) ds + \int_{\partial A_D} \vec{\mu}_\theta \cdot \vec{h}_\theta(\vec{\theta}) ds &\leq \mathfrak{Z}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) \\ + \int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) ds + \int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{h}_\theta(\vec{\theta}) ds, &\forall (\vec{\mu}_{u_o}, \vec{\mu}_\theta) \text{ em } \mathbf{H} \end{aligned} \quad (2.76)$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \int_{\partial A_D} (\vec{\lambda}_{u_o} - \vec{\mu}_{u_o}) \cdot \vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) ds \\ + \int_{\partial A_D} (\vec{\lambda}_\theta - \vec{\mu}_\theta) \cdot \vec{h}_\theta(\vec{\theta}) ds \geq 0, \forall (\vec{\mu}_{u_o}, \vec{\mu}_\theta) \text{ em } \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Desta forma, substituindo-se  $\vec{\mu}_{u_o} = \vec{0}$  e  $\vec{\mu}_\theta = \vec{\lambda}_\theta$  em (2.77) deriva-se

$$\int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) ds \geq 0. \quad (2.78)$$

Adicionalmente, substituindo-se  $\vec{\mu}_{u_o} = 2\vec{\lambda}_{u_o}$  e  $\vec{\mu}_\theta = \vec{\lambda}_\theta$  em Eq. (2.77) obtém-se

$$\int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) ds \leq 0. \quad (2.79)$$

Portanto, das Eq. (2.78) e Eq. (2.79) tem-se:

$$\int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) ds = 0. \quad (2.80)$$

Por analogia, substituindo-se  $\vec{\mu}_{u_o} = \vec{\lambda}_{u_o}$  e  $\vec{\mu}_\theta = \vec{0}$  em (2.77) deriva-se

$$\int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{h}_\theta(\vec{\theta}) ds \geq 0. \quad (2.81)$$

Adicionalmente, substituindo-se  $\vec{\mu}_{u_o} = \vec{\lambda}_{u_o}$  e  $\vec{\mu}_\theta = 2\vec{\lambda}_\theta$  em (2.77) obtém-se

$$\int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{h}_\theta(\vec{\theta}) ds \leq 0. \quad (2.82)$$

Combinando os resultados em Eq. (2.81) e (2.82) tem-se:

$$\int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{h}_\theta(\vec{\theta}) ds = 0. \quad (2.83)$$

Note que os resultados em (2.80) e (2.83) indicam a ortogonalidade entre os multiplicadores de Lagrange  $(\vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta)$  com as restrições  $\vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o)$  em  $L^2(\Gamma_D)^d$  e  $\vec{h}_\theta(\vec{\theta})$  em  $L^2(\Gamma_D)^d$ . Além disso, tomando-se  $\vec{\mu}_{u_o} = \vec{\lambda}_{u_o} + \delta \vec{\lambda}_{u_o}$ , e  $\vec{\mu}_\theta = \vec{\lambda}_\theta + \delta \vec{\lambda}_\theta$ , para qualquer  $(\delta \vec{\lambda}_{u_o}, \delta \vec{\lambda}_\theta)$  em  $\mathbf{H}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\partial A_D} \delta \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) ds &= 0, \\ \text{e} \\ \int_{\partial A_D} \delta \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{h}_\theta(\vec{\theta}) ds &= 0, \forall (\delta \vec{\lambda}_{u_o}, \delta \vec{\lambda}_\theta) \text{ em } \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (2.84)$$

resultando em

$$\begin{aligned} \vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) &= 0 \text{ em } \partial A_D \\ \text{e} \\ \vec{h}_\theta(\vec{\theta}) &= 0 \text{ em } \partial A_D. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Esta última equação indica que a solução de  $(\vec{u}_o, \vec{\theta})$  para o problema de ponto de sela satisfaz as restrições do problema de minimização originais em (2.72), ou seja,

$$\begin{aligned} (\vec{u}_o, \vec{\theta}) &\in \mathbf{W} \\ \text{com} \\ \vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) &= 0 \text{ e } \vec{h}_\theta(\vec{\theta}) = 0 \text{ em } \partial A_D. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Por outro lado, a partir da segunda desigualdade no problema de ponto de sela na Eq. (2.74) tem-se que

$$\check{L}(\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta) \leq \check{L}(\vec{w}, \vec{\alpha}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta), \text{ para cada } (\vec{w}, \vec{\alpha}) \in \mathbf{W}, \quad (2.87)$$

i.e.

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(\vec{w}, \vec{\alpha}) - \mathfrak{I}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) + \int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_{u_o} \cdot (\vec{h}_{u_o}(\vec{w}) - \vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o)) \, ds \\ + \int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_{\theta} \cdot (\vec{h}_{\theta}(\vec{\alpha}) - \vec{h}_{\theta}(\vec{\theta})) \, ds \geq 0, \forall (\vec{w}, \vec{\alpha}) \in \mathbf{W}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Supondo que o funcional  $\mathfrak{I}(\cdot)$  é  $G$ -diferenciável em  $\mathbf{W}$ , obtemos

$$\begin{aligned} D\mathfrak{I}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) [\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mathfrak{I}(\vec{u}_o + \varepsilon \delta \vec{u}_o, \vec{\theta} + \varepsilon \delta \vec{\theta}) - \mathfrak{I}(\vec{u}_o, \vec{\theta})}{\varepsilon} \right\} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \mathfrak{I}(\vec{u}_o + \varepsilon \delta \vec{u}_o, \vec{\theta} + \varepsilon \delta \vec{\theta}) \right\} \Big|_{\varepsilon=0}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Adicionalmente, supondo que  $\vec{h}_{u_o}(\cdot)$  e  $\vec{h}_{\theta}(\cdot)$  são  $G$ -diferenciáveis em  $\mathbf{H}$ , obtemos

$$\begin{aligned} D\vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) [\delta \vec{u}_o] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o + \varepsilon \delta \vec{u}_o) - \vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o)}{\varepsilon} \right\} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o + \varepsilon \delta \vec{u}_o) \right\} \Big|_{\varepsilon=0} \\ \text{e} \\ D\vec{h}_{\theta}(\vec{\theta}) [\delta \vec{\theta}] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\vec{h}_{\theta}(\vec{\theta} + \varepsilon \delta \vec{\theta}) - \vec{h}_{\theta}(\vec{\theta})}{\varepsilon} \right\} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \vec{h}_{\theta}(\vec{\theta} + \varepsilon \delta \vec{\theta}) \right\} \Big|_{\varepsilon=0}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Agora, tomando-se  $\vec{w} = \vec{u}_o + \varepsilon \delta \vec{u}_o$  e  $\vec{\alpha} = \vec{\theta} + \varepsilon \delta \vec{\theta}$ , para  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , dividindo-se por  $\varepsilon > 0$  e tomando-se o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  e dividindo-se por  $\varepsilon < 0$  e tomando-se o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  deriva-se

$$\begin{aligned} D\mathfrak{I}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) [\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}] + \int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_{u_o} \cdot D\vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) [\delta \vec{u}_o] \, ds \\ + \int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_{\theta} \cdot D\vec{h}_{\theta}(\vec{\theta}) [\delta \vec{\theta}] \, ds = 0, \forall (\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}) \in \mathbf{W} \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} D\mathfrak{I}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) [\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}] &= \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \mathfrak{I}(\vec{u}_o + \varepsilon \delta \vec{u}_o, \vec{\theta} + \varepsilon \delta \vec{\theta}) \right\} \Big|_{\varepsilon=0} \\ D\vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) [\delta \vec{u}_o] &= \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o + \varepsilon \delta \vec{u}_o) \right\} \Big|_{\varepsilon=0} \\ D\vec{h}_{\theta}(\vec{\theta}) [\delta \vec{\theta}] &= \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \vec{h}_{\theta}(\vec{\theta} + \varepsilon \delta \vec{\theta}) \right\} \Big|_{\varepsilon=0}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Além disso, a partir da segunda desigualdade e da condição de ortogonalidade

nas Eq.(2.78) e Eq. (2.83), dadas por

$$\begin{aligned} \int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) ds &= 0 \\ \text{e} \\ \int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{h}_\theta(\vec{\theta}) ds &= 0, \end{aligned} \quad (2.92)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) \leq \mathfrak{L}(\vec{w}, \vec{\alpha}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta) &= \mathfrak{S}(\vec{w}, \vec{\alpha}) + \int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{h}_{u_o}(\vec{w}) ds \\ &\quad + \int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{h}_\theta(\vec{\alpha}) ds, \text{ para cada } (\vec{w}, \vec{\alpha}) \in \mathbf{W} \end{aligned} \quad (2.93)$$

Impondo-se adicionalmente que

$$\begin{aligned} \vec{h}_{u_o}(\vec{w}) &= 0, \text{ em } \partial A_D \\ \text{e} \\ \vec{h}_\theta(\vec{\alpha}) &= 0, \text{ em } \partial A_D. \end{aligned} \quad (2.94)$$

deriva-se

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) \leq \mathfrak{L}(\vec{w}, \vec{\alpha}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta) &= \mathfrak{S}(\vec{w}, \vec{\alpha}) + \int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{h}_{u_o}(\vec{w}) ds \\ &\quad + \int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{h}_\theta(\vec{\alpha}) ds \\ &= \mathfrak{S}(\vec{w}, \vec{\alpha}), \end{aligned}$$

para cada  $(\vec{w}, \vec{\alpha}) \in \mathbf{W}_o \subset \mathbf{W}$  sendo

$$\mathbf{W}_o = \left\{ (\vec{w}, \vec{\alpha}) \mid (\vec{w}, \vec{\alpha}) \in \mathbf{W}, \vec{h}_{u_o}(\vec{w}) = 0 \text{ e } \vec{h}_\theta(\vec{\alpha}) = 0, \text{ em } \partial A_D \right\}, \quad (2.95)$$

a qual pode ser expressa de forma compacta como:

$$\mathfrak{S}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) \leq \mathfrak{S}(\vec{w}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{w}, \vec{\alpha}) \in \mathbf{W}_o \subset \mathbf{W}. \quad (2.96)$$

Como resultado, pode-se concluir que se  $(\vec{u}_o, \vec{\theta})$  é solução do problema de ponto de sela em (2.74) então  $(\vec{u}_o, \vec{\theta})$  é o minimizador de  $\mathfrak{S}(\vec{w}, \vec{\alpha})$  sobre o conjunto restrito  $\mathbf{W}_o$ , sendo

$$\mathbf{W}_o = \left\{ (\vec{w}, \vec{\alpha}) \mid (\vec{w}, \vec{\alpha}) \in \mathbf{W}, \vec{h}_{u_o}(\vec{w}) = 0 \text{ e } \vec{h}_\theta(\vec{\alpha}) = 0, \text{ em } \partial A_D \right\}. \quad (2.97)$$



Dos resultados acima temos que:  $(\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H}$  satisfaz

$$\begin{aligned}
 (a) \int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) ds &= 0 \\
 (b) \int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{h}_\theta(\vec{\theta}) ds &= 0 \\
 (c) \int_{\partial A_D} \delta \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) ds &= 0, \forall \delta \vec{\lambda}_{u_o} \text{ implicando } \vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) = 0 \text{ em } \partial A_D \\
 (d) \int_{\partial A_D} \delta \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{h}_\theta(\vec{\theta}) ds &= 0, \forall \delta \vec{\lambda}_\theta \text{ implicando } \vec{h}_\theta(\vec{\theta}) = 0 \text{ em } \partial A_D \\
 (e) D\mathfrak{S}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) [\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}] &+ \int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_{u_o} \cdot D\vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) [\delta \vec{u}_o] ds \\
 &+ \int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_\theta \cdot D\vec{h}_\theta(\vec{\theta}) [\delta \vec{\theta}] ds = 0, \forall (\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}) \in \mathbf{W}.
 \end{aligned} \tag{2.98}$$

As relações de (a), (b), (c), (d) e (e) na Eq. (2.98) são denominadas condições de Kuhn-Tucker para o problema de minimização com restrições em (2.72).

Da definição de  $\vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o)$  e  $\vec{h}_\theta(\vec{\theta})$  tem-se:

$$\begin{aligned}
 D\vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) [\delta \vec{u}_o] &= \delta \vec{u}_o \\
 \text{e} \\
 D\vec{h}_\theta(\vec{\theta}) [\delta \vec{\theta}] &= \delta \vec{\theta}.
 \end{aligned} \tag{2.99}$$

Além disso:

$$\begin{aligned}
 D\mathfrak{S}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) [\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}] &= \int_A [\mathbf{D}] \vec{\kappa}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) \cdot \vec{\kappa}(\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}) dA \\
 &- \int_{\partial A_N} \left\{ \vec{N} \cdot \delta \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} \right\} ds \\
 &- \int_A \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \right\} \vec{g} \cdot \delta \vec{u}_o dA - \int_{A_N} q_o \vec{n} \cdot \delta \vec{u}_o dA.
 \end{aligned} \tag{2.100}$$

Substituindo (2.99) e (2.100) nos itens de (c), (d) e (e) da Eq. (2.98), finalmente determina-se as condições necessárias de otimalidade, i.e., se  $(\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H}$  é solução do problema de ponto de sela então

satisfaz as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } \int_{\partial A_D} \delta \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{h}_{u_o}(\vec{u}_o) ds + \int_{\partial A_D} \delta \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{h}_\theta(\vec{\theta}) ds = 0, \forall (\delta \vec{\lambda}_{u_o}, \delta \vec{\lambda}_\theta) \in \mathbf{H}; \\
 & \text{e} \\
 & \text{(b) } \int_A [\mathbf{D}] \vec{\kappa}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) \cdot \vec{\kappa}(\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}) dA - \int_A \sum_{l=1}^n \{\rho^l (h^{l+1} - h^l)\} \vec{g} \cdot \delta \vec{u}_o dA \\
 & \quad - \int_{\partial A_N} \left\{ \vec{N} \cdot \delta \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} \right\} ds - \int_{A_N} q_o \vec{n} \cdot \delta \vec{u}_o dA + \int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \delta \vec{u}_o ds \\
 & \quad + \int_{\partial A_D} \vec{\lambda}_\theta \cdot \delta \vec{\theta} ds = 0, \forall (\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}) \in \mathbf{W}.
 \end{aligned} \tag{2.101}$$

As expressões acima podem ser rearranjadas resultando na seguinte formulação fraca do problema de placa:

$$\begin{aligned}
 & \text{Determinar } (\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H} \text{ de modo que} \\
 & \int_A [\mathbf{D}] \vec{\kappa}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) \cdot \vec{\kappa}(\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}) dA - \int_A \sum_{l=1}^n \{\rho^l (h^{l+1} - h^l)\} \vec{g} \cdot \delta \vec{u}_o dA \\
 & \quad - \int_{\partial A_N} \left\{ \vec{N} \cdot \delta \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} \right\} ds - \int_{A_N} q_o \vec{n} \cdot \delta \vec{u}_o dA + \int_{\partial A_D} \left\{ \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \delta \vec{u}_o + \delta \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{u}_o \right\} ds \\
 & \quad + \int_{\partial A_D} \left\{ \vec{\lambda}_\theta \cdot \delta \vec{\theta} + \delta \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{\theta} \right\} ds = 0, \forall (\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}, \delta \vec{\lambda}_{u_o}, \delta \vec{\lambda}_\theta) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}.
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

### 3 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Neste capítulo apresenta-se a formulação do problema de otimização para a minimização da flexibilidade sujeito à restrições de volume e perímetro utilizando-se o método *level set*. Apresenta-se também a análise de sensibilidade de forma que permite a determinação do campo de velocidades normais à fronteira, o qual é responsável por gerar uma sequência minimizante para o problema de otimização estrutural. Adicionalmente, apresenta-se a abordagem euleriana para otimização de forma visando descrever o processo de otimização baseado no método *level set*.

#### 3.1 Formulação do problema de otimização

Denota-se a função objetivo como:  $J\left(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta\right)$ . Por simplicidade considera-se que a função objetivo,  $J\left(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta\right)$ , é dada pela *compliance* da estrutura. Ou seja, pelo trabalho realizado pela carga externa prescrita (ALLAIRE; JOUVE; TOADER, 2004), definida por:

$$J\left(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta\right) = \int_A \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \right\} \vec{g} \cdot \vec{u}_o \, dA \\ + \int_{\partial A_N} \left\{ \vec{N} \cdot \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \vec{\theta} \right\} ds + \int_A q_o \vec{n} \cdot \vec{u}_o \, dA. \quad (3.1)$$

Note que, em (3.1), para um determinado  $\Omega$ ,  $\left(\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta\right)$  é a solução da Eq. (2.102). Como  $\Omega$  é variável ao longo do processo de otimização,  $\vec{b}^k$  e  $\vec{t}$  devem ser conhecidos em todas as configurações possíveis de  $\Omega$ . Para tanto, introduz-se um domínio de trabalho  $D$  (um conjunto aberto limitado de  $R^2$ ) que contém todas as formas admissíveis  $\Omega$ , ou seja:

$$\Omega \subset D, \\ \text{sendo} \\ D \text{ um conjunto aberto limitado e fixo em } R^2. \quad (3.2)$$

Para estabelecer o problema "bem posto" matematicamente dada pela Eq. (2.3) ou (2.102), escolhe-se  $\vec{b}^k \in L^2(D)^d$  e  $\vec{t} \in H^1(D)^d$  e assume-se que  $\Gamma_D \neq \emptyset$ . Em tal caso, é sabido que na Eq. (2.3) ou (2.102) admite uma solução única em  $H^1(D)^d$ .

Define-se um conjunto de formas admissíveis que devem ser conjuntos

abertos contidos no domínio de trabalho  $D$  com volume fixo  $V$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ad} &= \{\Omega \subset D \text{ tal que } Vol(\Omega) = V\} \\ \text{sendo} \\ Vol(\Omega) &= \int_{\Omega} 1 \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Observe que, minimizar a flexibilidade de um corpo significa maximizar a sua rigidez. Isto significa que, neste caso, formas ideais tendem a utilizar tanto material quanto possível. Desta maneira, para obter-se uma forma e topologia ótima é necessário a imposição de uma restrição de volume. Portanto, faz sentido penalizar o volume da estrutura em nosso problema de otimização de forma através da introdução de um parâmetro de controle não negativo, (Multiplicador de Lagrange),  $\mu_v \in R$ ,  $\mu_v \geq 0$  visando a incorporação da restrição de volume. Como segue

$$\begin{aligned} J_{\mu} \left( \Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_{\theta} \right) &= \int_A \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \right\} \vec{g} \cdot \vec{u}_o \, dA \\ &\quad + \int_{\partial A_N} \left\{ \vec{N} \cdot \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \vec{\theta} \right\} ds + \int_A q_o \vec{n} \cdot \vec{u}_o \, dA \\ &\quad + \mu_v \int_{\Omega} 1 \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.4)$$

O problema de otimização de forma, neste ponto, pode ser definido como:

$$\begin{aligned} \inf_{\Omega \in \mathcal{P}_{ad}} J_{\mu} \left( \Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_{\theta} \right) \\ \text{onde, para cada } \Omega, \left( \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_{\theta} \right) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H} \text{ é solução de} \\ a \left( \Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta} \right) + \int_{\partial A_D} \left\{ \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \delta \vec{u}_o + \delta \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{u}_o \right\} ds \\ + \int_{\partial A_D} \left\{ \vec{\lambda}_{\theta} \cdot \delta \vec{\theta} + \delta \vec{\lambda}_{\theta} \cdot \vec{\theta} \right\} ds = l \left( \Omega, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta} \right), \\ \text{para cada } \left( \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}, \delta \vec{\lambda}_{u_o}, \delta \vec{\lambda}_{\theta} \right) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H} \end{aligned} \quad (3.5)$$

sendo

$$\begin{aligned} a \left( \Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta} \right) &= \int_A [\mathbf{D}] \vec{\kappa} \left( \vec{u}_o, \vec{\theta} \right) \cdot \vec{\kappa} \left( \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta} \right) dA \quad e \\ l \left( \Omega, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta} \right) &= \int_A \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \right\} \vec{g} \cdot \delta \vec{u}_o \, dA \\ &\quad + \int_{\partial A_N} \left\{ \vec{N} \cdot \delta \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} \right\} ds + \int_A q_o \vec{n} \cdot \delta \vec{u}_o \, dA. \end{aligned} \quad (3.6)$$

É bem conhecido que o problema da minimização na Eq. (3.5) geralmente não é bem posto no conjunto das formas admissíveis definidos por (3.5), i.e., não tem solução (ALLAIRE; JOUVE; TOADER, 2004). A fim de ob-

ter a existência de formas ideais são necessárias algumas funções suaves ou geométricas ou restrições topológicas. Por exemplo, uma variante da Eq. (3.5) com uma restrição de perímetro torna o problema bem-posto matematicamente. O perímetro  $g_p(\Omega)$  de um conjunto aberto  $\Omega$  é definido como a medida de Hausdorff  $(d-1)$  dimensional da sua fronteira  $\partial\Omega$ , ou seja  $g_p(\Omega) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)$ , a qual reduz-se à  $g_p(\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1 \, d\Gamma$  para domínios suaves.

Com esta informação em mente, pode-se redefinir o conjunto de formas admissíveis como sendo os conjuntos abertos contidos no domínio de trabalho  $D$  com um volume  $V$  e perímetro  $P$  fixos, i.e.,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ad} &= \{ \Omega \subset D \text{ de modo que } Vol(\Omega) = V \text{ e } Per(\Omega) = P \} \\ \text{sendo} \\ Per(\Omega) &= \int_{\partial\Omega} 1 \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Assim, faz sentido penalizar não só o volume da estrutura, mas também o perímetro da estrutura. No caso do perímetro, isto é feito através da introdução de um parâmetro de controle não negativo  $\mu_p \in R$ ,  $\mu_p \geq 0$  e pela modificação da função objetivo na Eq. (3.4) como:

$$\begin{aligned} J_\mu \left( \Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta \right) &= \int_A \sum_{l=1}^n \{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \} \vec{g} \cdot \vec{u}_o \, dA \\ &+ \int_{\partial A_N} \left\{ \vec{N} \cdot \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \vec{\theta} \right\} ds + \int_A q_o \vec{n} \cdot \vec{u}_o \, dA \\ &+ \mu_v \int_A 1 \, dA + \mu_p \int_{\partial A} 1 \, ds. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como resultado, o problema de otimização de forma pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} &\inf_{\Omega \in \mathcal{P}_{ad}} J_\mu \left( \Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta \right) \\ &\text{na qual, para um dado } \Omega, \left( \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta \right) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H} \text{ é a solução de} \\ &a \left( \Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta} \right) + \int_{\partial A_D} \left\{ \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \delta \vec{u}_o + \delta \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{u}_o \right\} ds \\ &+ \int_{\partial A_D} \left\{ \vec{\lambda}_\theta \cdot \delta \vec{\theta} + \delta \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{\theta} \right\} ds = l \left( \Omega, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta} \right), \\ &\forall \left( \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}, \delta \vec{\lambda}_{u_o}, \delta \vec{\lambda}_\theta \right) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde

$$\begin{aligned}
 a\left(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}\right) &= \int_A [\mathbf{D}] \vec{\kappa}\left(\vec{u}_o, \vec{\theta}\right) \cdot \vec{\kappa}\left(\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}\right) dA \\
 l\left(\Omega, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}\right) &= \int_A \sum_{l=1}^n\left\{\rho^l\left(h^{l+1}-h^l\right)\right\} \vec{g} \cdot \delta \vec{u}_o dA \\
 &+ \int_{\partial A_N}\left\{\vec{N} \cdot \delta \vec{u}_o-\vec{M} \cdot \delta \vec{\theta}\right\} d s+\int_A q_o \vec{n} \cdot \delta \vec{u}_o d A,
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

sendo  $\mathcal{P}_{ad} = \{\Omega \subset D \text{ de modo que } Vol(\Omega) = V \text{ e } Per(\Omega) = P\}$ , em que  $\Omega$  tem um contorno de Lipschitz.

### 3.2 Formulação do problema com o método *level set*

O objetivo aqui é apresentar a idéia do *level set* e reformular a minimização do funcional acima na Eq. (3.9) em termos de um espaço vetorial, cujos elementos são um conjunto de funções suaves,  $\phi(\vec{x})$ . Como resultado, o problema pode ser formulado em uma estrutura *level set*, em que o domínio é descrito por um contorno o qual é incorporado implicitamente via a introdução de uma função escalar de dimensionalidade maior.

Como um conjunto de funções *level set* a descrição do contorno é feita implicitamente, i.e., sem a necessidade de uma representação explícita do contorno. Embora a forma e a conectividade (isto é, a topologia) do contorno possam sofrer alterações drásticas, a função *level set* permanece simples na sua topologia. Portanto, para um cálculo direto e eficiente no espaço de aproximação, os contornos podem ser rastreados a um nível de precisão, resultando em uma melhor estrutura em termos de forma e topologia. Os métodos *level set* são referidos como métodos de representação de região e eles podem facilmente representar contornos complexos que podem formar vazios, dividir em várias partes, ou mesclar com outros para formar um único domínio. Com base no conceito de propagação da interface usando um função *level set*, pode-se desenvolver um algoritmo de otimização o qual faz uso da análise da sensibilidade de forma levando à determinação da forma e topologia ótima da estrutura.

Seja  $D \subset R^2$  o domínio limitado de trabalho em que todas as formas admissíveis  $\Omega$  estão incluídas, isto é  $\Omega \subset D$ . Parametriza-se o contorno de  $\Omega$  por meio de uma função *level set* (OSHER; SETHIAN, 1988). Define-se esta

função *level set*  $\phi$  em  $D$  de modo que:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}) &= 0 \iff \vec{x} \in \partial\Omega \cap D \\ \phi(\vec{x}) &< 0 \iff \vec{x} \in (D \setminus \bar{\Omega}) \\ \phi(\vec{x}) &> 0 \iff \vec{x} \in \Omega,\end{aligned}\tag{3.11}$$

sendo  $\vec{n}$  o vetor unitário normal à forma  $\Omega$ , definido por:

$$\vec{n} = -\frac{\nabla_{\vec{x}}\phi(\vec{x})}{\|\nabla_{\vec{x}}\phi(\vec{x})\|}.\tag{3.12}$$

### 3.2.1 Problema de minimização com restrições de desigualdade

Com a introdução da função *level set* pode-se reformular o problema de otimização em (3.9) como:

$$\begin{aligned}&\inf_{\phi \in \mathbf{W}_\phi} J_\mu \left( \phi, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta \right) \\ &\text{em que} \\ &J_\mu \left( \phi, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta \right) = J \left( \phi, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta \right) + \mu_v g_v(\phi) + \mu_p g_p(\phi),\end{aligned}\tag{3.13}$$

com

$$\begin{aligned}J \left( \phi, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta \right) &= \int_D \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \right\} \vec{g} \cdot \vec{u}_o h(\phi) dA \\ &+ \int_D q_o \vec{n} \cdot \vec{u}_o h(\phi) d\Omega + \int_D \left\{ \vec{N} \cdot \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \vec{\theta} \right\} \delta_{\Gamma_N}(\phi) \|\nabla_{\vec{x}}\phi(\vec{x})\| dA;\end{aligned}\tag{3.14}$$

sendo

$$\begin{aligned}g_v(\phi) &= \int_D h(\phi) dA \\ g_p(\phi) &= \int_D 1 \delta_{\Gamma}(\phi) \|\nabla_{\vec{x}}\phi(\vec{x})\| dA.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Note que, nas equações acima, para cada dada  $\phi$ ,  $(\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H}$  é solução de:

$$\begin{aligned}&a \left( \Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta} \right) + \int_{\partial A_D} \left\{ \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \delta \vec{u}_o + \delta \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{u}_o \right\} ds \\ &+ \int_{\partial A_D} \left\{ \vec{\lambda}_\theta \cdot \delta \vec{\theta} + \delta \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{\theta} \right\} ds = l \left( \Omega, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta} \right), \\ &\forall \left( \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}, \delta \vec{\lambda}_{u_o}, \delta \vec{\lambda}_\theta \right) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H};\end{aligned}\tag{3.16}$$

com

$$\begin{aligned} a\left(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}\right) &= \int_A [\mathbf{D}] \vec{\kappa}\left(\vec{u}_o, \vec{\theta}\right) \cdot \vec{\kappa}\left(\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}\right) dA \\ l\left(\Omega, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}\right) &= \int_A \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l \left( h^{l+1} - h^l \right) \right\} \vec{g} \cdot \delta \vec{u}_o dA \\ &+ \int_{\partial A_N} \left\{ \vec{N} \cdot \delta \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} \right\} ds + \int_A q_o \vec{n} \cdot \delta \vec{u}_o dA. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Aqui,  $\mathbf{W}_\phi = \{ \phi \mid \phi \in H^q(D) \text{ para } q \text{ suf. grande} \}$ , em que  $h(\phi)$  é a função Heaviside definida por

$$h(\phi(\vec{x})) = \begin{cases} 1, & \text{se } \phi(\vec{x}) \geq 0 \\ 0, & \text{se } \phi(\vec{x}) < 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

e  $\delta_\Gamma(\phi)$  a função generalizada delta de Dirac definida, no sentido de distribuição, conforme

$$\delta_\Gamma(\phi(\vec{x})) = \frac{d}{d\phi} \{ h(\phi(\vec{x})) \}, \text{ para } \vec{x} \in \Gamma. \quad (3.19)$$

### 3.3 Formulação do problema de minimização sem restrições

O problema de minimização sem restrições pode ser formulado como:

Dado  $(\mu_v, \mu_p) \geq (0, 0)$ , Determinar

$$\phi_o = \arg \inf_{\phi \in \mathbf{W}_\phi} J_\mu \left( \phi, \vec{u}_o(\phi), \vec{\theta}(\phi), \vec{\lambda}_{u_o}(\phi), \vec{\lambda}_\theta(\phi) \right)$$

sendo

$$\begin{aligned} J_\mu \left( \phi, \vec{u}_o(\phi), \vec{\theta}(\phi), \vec{\lambda}_{u_o}(\phi), \vec{\lambda}_\theta(\phi) \right) &= J \left( \phi, \vec{u}_o(\phi), \vec{\theta}(\phi), \vec{\lambda}_{u_o}(\phi), \vec{\lambda}_\theta(\phi) \right) \\ &+ \mu_v g_v(\phi) + \mu_p g_p(\phi), \end{aligned} \quad (3.20)$$

no qual

$$\begin{aligned} J \left( \phi, \vec{u}_o(\phi), \vec{\theta}(\phi), \vec{\lambda}_{u_o}(\phi), \vec{\lambda}_\theta(\phi) \right) &= \int_D \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l \left( h^{l+1} - h^l \right) \right\} \vec{g} \cdot \vec{u}_o h(\phi) dA \\ &+ \int_D q_o \vec{n} \cdot \vec{u}_o h(\phi) dA + \int_D \left\{ \vec{N} \cdot \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \vec{\theta} \right\} \delta_{\Gamma_N}(\phi) \|\nabla_{\vec{x}} \phi(\vec{x})\| dA \end{aligned} \quad (3.21)$$



em que, para cada  $\phi$ ,  $(\vec{u}_o(\phi), \vec{\theta}(\phi), \vec{\lambda}_{u_o}(\phi), \vec{\lambda}_\theta(\phi)) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}$  é solução de

$$\begin{aligned} a\left(\Omega_\phi, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}\right) + \int_{\partial A_D} \left\{ \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \delta \vec{u}_o + \delta \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{u}_o \right\} ds \\ + \int_{\partial A_D} \left\{ \vec{\lambda}_\theta \cdot \delta \vec{\theta} + \delta \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{\theta} \right\} ds = l\left(\Omega_\phi, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}\right), \forall \left(\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}, \delta \vec{\lambda}_{u_o}, \delta \vec{\lambda}_\theta\right) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H} \end{aligned} \quad (3.22)$$

com

$$\begin{aligned} a\left(\Omega_\phi, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}\right) &= \int_D [\mathbf{D}] \vec{\kappa}\left(\vec{u}_o, \vec{\theta}\right) \cdot \vec{\kappa}\left(\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}\right) h(\phi) dA \\ l\left(\Omega_\phi, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}\right) &= \int_D \Sigma_{l=1}^n \left\{ \rho^l \left( h^{l+1} - h^l \right) \right\} \vec{g} \cdot \delta \vec{u}_o h(\phi) dA \\ &+ \int_D \left\{ \vec{N} \cdot \delta \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} \right\} \delta_{\Gamma_N}(\phi) \|\nabla_{\vec{x}} \phi(\vec{x})\| d\Omega + \int_D q_o \vec{n} \cdot \delta \vec{u}_o h(\phi) dA. \end{aligned} \quad (3.23)$$

O problema de otimização, definido na Eq. (3.20), pode ser reformulado, considerando  $(\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta)$  como sendo independente de  $\phi$  e adicionando-se, como restrição de igualdade, a equação de estado da placa. Neste caso (3.20) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \text{Dado } (\mu_v, \mu_p) \geq (0, 0), \text{ determinar } \left(\phi, \vec{u}_o^*, \vec{\theta}^*, \vec{\lambda}_{u_o}^*, \vec{\lambda}_\theta^*\right) \text{ de modo que} \\ J_\mu\left(\phi, \vec{u}_o^*, \vec{\theta}^*, \vec{\lambda}_{u_o}^*, \vec{\lambda}_\theta^*\right) = \inf \left\{ J_\mu\left(\phi, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta\right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

sujeito à restrição de igualdade para cada  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \left\{ \left(\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta\right) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H} \right\} \text{ é solução de:} \\ a_\phi\left(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}\right) + \int_{\partial A_D} \left\{ \left(\vec{\lambda}_{u_o} \cdot \delta \vec{u}_o + \vec{\lambda}_\theta \cdot \delta \vec{\theta}\right) + \left(\delta \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{u}_o + \delta \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{\theta}\right) \right\} ds \\ = l_\phi\left(\Omega, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}\right), \forall \left(\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}, \delta \vec{\lambda}_{u_o}, \delta \vec{\lambda}_\theta\right) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

com

$$\begin{aligned} a\left(\phi, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}\right) &= \int_D [\mathbf{D}] \vec{\kappa}\left(\vec{u}_o, \vec{\theta}\right) \cdot \vec{\kappa}\left(\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}\right) h(\phi) dA \\ l\left(\phi, \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}\right) &= \int_D \Sigma_{l=1}^n \left\{ \rho^l \left( h^{l+1} - h^l \right) \right\} \vec{g} \cdot \delta \vec{u}_o h(\phi) dA \\ &+ \int_D \left\{ \vec{N} \cdot \delta \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} \right\} \delta_{\Gamma_N}(\phi) \|\nabla_{\vec{x}} \phi(\vec{x})\| dA + \int_D q_o \vec{n} \cdot \delta \vec{u}_o h(\phi) dA \end{aligned} \quad (3.26)$$

em que a função objetivo é dada por

$$J_{\mu} \left( \phi, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_{\theta} \right) = J \left( \phi, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_{\theta} \right) + \mu_v g_v(\phi) + \mu_p g_p(\phi), \quad (3.27)$$

na qual

$$\begin{aligned} J \left( \Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_{\theta} \right) &= \int_D \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \right\} \vec{g} \cdot \vec{u}_o h(\phi) dA \\ &+ \int_D q_o \vec{n} \cdot \vec{u}_o h(\phi) dA + \int_D \left\{ \vec{N} \cdot \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \vec{\theta} \right\} \delta_{\Gamma_N}(\phi) \|\nabla_{\vec{x}} \phi(\vec{x})\| dA. \end{aligned} \quad (3.28)$$

O funcional Lagrangeano associado ao problema de otimização acima é dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{L} \left( \Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_{\theta}, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_{\theta}, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_{\theta}} \right) &= J_{\mu} \left( \Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_{\theta} \right) \\ &- \left\{ a \left( \Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_{\theta} \right) + \int_{\partial A_D} \left\{ \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{p}_{u_o} + \vec{\lambda}_{\theta} \cdot \vec{p}_{\theta} \right\} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial A_D} \left\{ \vec{q}_{\lambda_{u_o}} \cdot \vec{u}_o + \vec{q}_{\lambda_{\theta}} \cdot \vec{\theta} \right\} ds - l(\Omega, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_{\theta}) \right\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

sendo

$$\begin{aligned} J_{\mu} \left( \Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_{\theta} \right) &= J \left( \Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_{\theta} \right) \\ &+ \mu_v g_v(\Omega) + \mu_p g_p(\Omega), \end{aligned} \quad (3.30)$$

com

$$\begin{aligned} J \left( \Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_{\theta} \right) &= \int_A \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \right\} \vec{g} \cdot \vec{u}_o dA \\ &+ \int_A q_o \vec{n} \cdot \vec{u}_o dA + \int_{\partial A_N} \left\{ \vec{N} \cdot \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \vec{\theta} \right\} ds \\ g_v(\Omega) &= \int_A 1 dA \\ g_p(\Omega) &= \int_{\partial A} 1 ds. \end{aligned} \quad (3.31)$$

### 3.3.1 Análise da sensibilidade de forma

Para obter uma adequada direção de descida no caminho da otimização é preciso conhecer a sensibilidade do problema estrutural com respeito às variáveis de projeto.

A análise de sensibilidade consiste em obter as derivadas da função objetivo, das restrições e da equação de estado em relação a um número finito de parâmetros que controlam o comportamento do sistema, as chamadas variáveis de projeto. Estas variáveis podem representar: propriedades consti-

tutivas, características geométricas, o próprio sistema de ações externas, etc. A análise de sensibilidade do domínio determina a variação da resposta do problema em relação às alterações na configuração espacial, (JUNIOR, 2011) e (SOKOLOWSKI; ZOLESIO, 1992).

A fim de obter a equação de estado associado ao problema de otimização em (3.24), calcula-se a estacionaridade de  $\tilde{L}(\cdot)$  com respeito à  $(\vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta)$  e  $(\vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta})$ .

• Dado  $\Omega$ , a estacionaridade de  $\tilde{L}(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta})$  com respeito à  $(\vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta})$  fornece:

$$\begin{aligned} & D\tilde{L}(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta}) [(\delta\vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \delta\vec{q}_{\lambda_\theta})] \\ &= \frac{d}{d\alpha} \left\{ \tilde{L}(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}} + \alpha\delta\vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta} + \alpha\delta\vec{q}_{\lambda_\theta}) \right\} \Big|_{\alpha=0} \\ &= 0, \forall (\delta\vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \delta\vec{q}_{\lambda_\theta}) \in \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

i.e.,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\alpha} \left\{ \tilde{L}(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}} + \alpha\delta\vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta} + \alpha\delta\vec{q}_{\lambda_\theta}) \right\} \Big|_{\alpha=0} \\ &= \int_{\partial AD} (\vec{u}_o \cdot \delta\vec{q}_{\lambda_{u_o}} + \vec{\theta} \cdot \delta\vec{q}_{\lambda_\theta}) ds \\ &= 0, \forall (\delta\vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \delta\vec{q}_{\lambda_\theta}) \in \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

• Dado  $\Omega$ , a estacionaridade de  $\tilde{L}(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta})$  com respeito à  $(\vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta)$  fornece:

$$\begin{aligned} & D\tilde{L}(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta}) [(\delta\vec{p}_{u_o}, \delta\vec{p}_\theta)] \\ &= \frac{d}{d\alpha} \left\{ \tilde{L}(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o} + \alpha\delta\vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta + \alpha\delta\vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta}) \right\} \Big|_{\alpha=0} \\ &= 0, \forall (\delta\vec{p}_{u_o}, \delta\vec{p}_\theta) \in \mathbf{W}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

i.e.,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\alpha} \left\{ \tilde{L}(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o} + \alpha\delta\vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta + \alpha\delta\vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta}) \right\} \Big|_{\alpha=0} \\ &= -a(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \delta\vec{p}_{u_o}, \delta\vec{p}_\theta) - \int_{\partial AD} (\vec{\lambda}_{u_o} \cdot \delta\vec{p}_{u_o} + \vec{\lambda}_\theta \cdot \delta\vec{p}_\theta) ds \\ &+ l(\Omega, \delta\vec{p}_{u_o}, \delta\vec{p}_\theta) = 0, \forall (\delta\vec{p}_{u_o}, \delta\vec{p}_\theta) \in \mathbf{W} \text{ e } \forall \alpha \in R. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Agora, tomando-se os resultados das Eq. (3.33) e (3.35) pode-se obter a

equação de estado, a qual é formulada como:

$$\begin{aligned} &\text{Dado } \Omega, \text{ determinar } (\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H} \text{ solução de} \\ &a\left(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \delta \vec{p}_{u_o}, \delta \vec{p}_\theta\right) + \int_{\partial A_D} \left(\vec{\lambda}_{u_o} \cdot \delta \vec{p}_{u_o} + \vec{\lambda}_\theta \cdot \delta \vec{p}_\theta\right) ds \\ &\quad + \int_{\partial A_D} \left(\vec{u}_o \cdot \delta \vec{q}_{\lambda_{u_o}} + \vec{\theta} \cdot \delta \vec{q}_{\lambda_\theta}\right) ds = l\left(\Omega, \delta \vec{p}_{u_o}, \delta \vec{p}_\theta\right) \\ &\forall (\delta \vec{p}_{u_o}, \delta \vec{p}_\theta, \delta \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \delta \vec{q}_{\lambda_\theta}) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

sendo

$$\begin{aligned} &a\left(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \delta \vec{p}_{u_o}, \delta \vec{p}_\theta\right) = \int_A [\mathbf{D}] \vec{\kappa}\left(\vec{u}_o, \vec{\theta}\right) \cdot \vec{\kappa}\left(\delta \vec{p}_{u_o}, \delta \vec{p}_\theta\right) dA \\ &\text{com } [\mathbf{D}]^T = [\mathbf{D}] \\ &l\left(\Omega, \delta \vec{p}_{u_o}, \delta \vec{p}_\theta\right) = \int_A \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l \left(h^{l+1} - h^l\right) \right\} \vec{g} \cdot \delta \vec{p}_{u_o} dA \\ &\quad + \int_{\partial A_N} \left\{ \vec{N} \cdot \delta \vec{p}_{u_o} - \vec{M} \cdot \delta \vec{p}_\theta \right\} ds + \int_A q_o \vec{n} \cdot \delta \vec{p}_{u_o} dA. \end{aligned} \quad (3.37)$$

A fim de obter a equação adjunta associada ao problema de otimização em (3.24), calcula-se a estacionariedade de  $\tilde{L}(\cdot)$  com relação à  $(\vec{u}_o, \vec{\theta})$  e  $(\vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta)$ . Aqui, como será visto, a equação adjunta coincide com a equação de estado o que mostra ser o problema proposto auto-adjunto.

• Dado  $\Omega$ , a estacionariedade de  $\tilde{L}(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta})$  com respeito à  $(\vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta)$  fornece:

$$\begin{aligned} &D\tilde{L}\left(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta}\right) \left[ (\delta \vec{\lambda}_{u_o}, \delta \vec{\lambda}_\theta) \right] = \\ &\frac{d}{d\alpha} \left\{ \tilde{L}\left(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o} + \alpha \delta \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta + \alpha \delta \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta}\right) \right\} \Big|_{\alpha=0} = 0, \\ &\forall (\delta \vec{\lambda}_{u_o}, \delta \vec{\lambda}_\theta) \in \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

i.e.,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\alpha} \left\{ \tilde{L}\left(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o} + \alpha \delta \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta + \alpha \delta \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta}\right) \right\} \\ &= - \int_{\partial A_D} \left\{ \delta \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{p}_{u_o} + \delta \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{p}_\theta \right\} ds = 0, \\ &\forall (\delta \vec{\lambda}_{u_o}, \delta \vec{\lambda}_\theta) \in \mathbf{H} \text{ e } \forall \alpha \in R. \end{aligned} \quad (3.39)$$

• Dado  $\Omega$ , a estacionariedade de  $\tilde{L}(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta})$

com respeito à  $(\vec{u}_o, \vec{\theta})$  fornece:

$$\begin{aligned} & D\tilde{L}\left(\Omega, \vec{u}_o + \alpha\delta\vec{u}_o, \vec{\theta} + \alpha\delta\vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta}\right) \left[\left(\delta\vec{u}_o, \delta\vec{\theta}\right)\right] \\ &= \frac{d}{d\alpha} \left\{ \tilde{L}\left(\Omega, \vec{u}_o + \alpha\delta\vec{u}_o, \vec{\theta} + \alpha\delta\vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta}\right) \right\} \Big|_{\alpha=0} = 0, \\ & \forall \left(\delta\vec{u}_o, \delta\vec{\theta}\right) \in \mathbf{W}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

i.e.,

$$\begin{aligned} & D\tilde{L}\left(\Omega, \vec{u}_o + \alpha\delta\vec{u}_o, \vec{\theta} + \alpha\delta\vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta}\right) \left[\left(\delta\vec{u}_o, \delta\vec{\theta}\right)\right] \\ &= l\left(\Omega, \delta\vec{u}_o, \delta\vec{\theta}\right) - a\left(\Omega, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \delta\vec{u}_o, \delta\vec{\theta}\right) \\ & \quad - \int_{\partial AD} \left\{ \vec{q}_{\lambda_{u_o}} \cdot \delta\vec{u}_o + \vec{q}_{\lambda_\theta} \cdot \delta\vec{\theta} \right\} ds = 0, \forall \left(\delta\vec{u}_o, \delta\vec{\theta}\right) \in \mathbf{W}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Agora, tomando-se os resultados de (3.39) e (3.41) permite-se obter a equação adjunta, a qual é formulado como:

$$\begin{aligned} & \text{Dado } \Omega, \text{ determinar } (\vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta}) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H} \text{ solução de} \\ & a\left(\Omega, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \delta\vec{u}_o, \delta\vec{\theta}\right) + \int_{\partial AD} \left\{ \vec{q}_{\lambda_{u_o}} \cdot \delta\vec{u}_o + \vec{q}_{\lambda_\theta} \cdot \delta\vec{\theta} \right\} ds \\ & \quad + \int_{\partial AD} \left\{ \delta\vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{p}_{u_o} + \delta\vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{p}_\theta \right\} ds = l\left(\Omega, \delta\vec{u}_o, \delta\vec{\theta}\right) \\ & \forall \left(\delta\vec{u}_o, \delta\vec{\theta}, \delta\vec{\lambda}_{u_o}, \delta\vec{\lambda}_\theta\right) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

sendo

$$\begin{aligned} & a\left(\Omega, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \delta\vec{u}_o, \delta\vec{\theta}\right) = \int_A [\mathbf{D}] \vec{\kappa}(\vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta) \cdot \vec{\kappa}(\delta\vec{u}_o, \delta\vec{\theta}) dA \\ & l\left(\Omega, \delta\vec{u}_o, \delta\vec{\theta}\right) = \int_A \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \right\} \vec{g} \cdot \delta\vec{u}_o dA \\ & \quad + \int_{\partial AN} \left\{ \vec{N} \cdot \delta\vec{u}_o - \vec{M} \cdot \delta\vec{\theta} \right\} ds + \int_A q_o \vec{n} \cdot \delta\vec{u}_o dA. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Comparando a equação de estado para  $(\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta)$  na Eq. (3.36) e a equação adjunta para  $(\vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta})$  na Eq. (3.42) conclui-se que ambas

são idênticas, o que conduz à conclusão de que:

Dado  $\Omega$ , a solução  $(\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta)$  da equação de estado é também solução da equação adjunta, i.e.,

$$(\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta) = (\vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta}) \quad (3.44)$$

o que significa que o problema é auto-adjunto.

• A fim de obter a análise de sensibilidade da forma contínua do problema da placa deve-se calcular, veja o apêndice C, a seguinte derivada:

$$\begin{aligned} D\tilde{L}(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta}) [\vec{V}(\vec{x})] \\ = \frac{d}{d\tau} \left\{ \tilde{L}_\tau(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{\lambda}_{u_{o\tau}}, \vec{\lambda}_{\theta\tau}, \vec{p}_{u_{o\tau}}, \vec{p}_{\theta\tau}, \vec{q}_{\lambda_{u_{o\tau}}}, \vec{q}_{\lambda_{\theta\tau}}) \right\} \Big|_{\tau=0}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

A análise de sensibilidade de  $\tilde{L}(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta})$ , com respeito à mudança de  $\Omega$  pelo mapeamento

$$\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x}) = \vec{x} + \tau \vec{V}(\vec{x}), \quad (3.46)$$

é dada por

$$\begin{aligned} D\tilde{L}(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta, \vec{p}_{u_o}, \vec{p}_\theta, \vec{q}_{\lambda_{u_o}}, \vec{q}_{\lambda_\theta}) [\vec{V}(\vec{x})] \\ = \frac{d}{d\tau} \left\{ \tilde{L}_\tau(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{\lambda}_{u_{o\tau}}, \vec{\lambda}_{\theta\tau}, \vec{p}_{u_{o\tau}}, \vec{p}_{\theta\tau}, \vec{q}_{\lambda_{u_{o\tau}}}, \vec{q}_{\lambda_{\theta\tau}}) \right\} \Big|_{\tau=0} \end{aligned} \quad (3.47)$$

sendo

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\tau(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{\lambda}_{u_{o\tau}}, \vec{\lambda}_{\theta\tau}, \vec{p}_{u_{o\tau}}, \vec{p}_{\theta\tau}, \vec{q}_{\lambda_{u_{o\tau}}}, \vec{q}_{\lambda_{\theta\tau}}) &= J_{\mu_\tau}(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{\lambda}_{u_{o\tau}}, \vec{\lambda}_{\theta\tau}) \\ &- \left\{ a(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{p}_{u_{o\tau}}, \vec{p}_{\theta\tau}) + \int_{\partial A_{D\tau}} \left\{ \vec{\lambda}_{u_{o\tau}} \cdot \vec{p}_{u_{o\tau}} + \vec{\lambda}_{\theta\tau} \cdot \vec{p}_{\theta\tau} \right\} ds_\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial A_{D\tau}} \left\{ \vec{q}_{\lambda_{u_{o\tau}}} \cdot \vec{u}_{o\tau} + \vec{q}_{\lambda_{\theta\tau}} \cdot \vec{\theta}_\tau \right\} ds_\tau - l(\Omega_\tau, \vec{p}_{u_{o\tau}}, \vec{p}_{\theta\tau}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

em que

$$\begin{aligned}
 J_{\mu_\tau}(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{\lambda}_{u_{o\tau}}, \vec{\lambda}_{\theta_\tau}) &= J_\tau(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{\lambda}_{u_{o\tau}}, \vec{\lambda}_{\theta_\tau}) + \mu_v g_v(\Omega_\tau) + \mu_p g_p(\Omega_\tau) \\
 J_\tau(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{\lambda}_{u_{o\tau}}, \vec{\lambda}_{\theta_\tau}) &= \int_{A_\tau} \sum_{l=1}^n \{\rho^l (h^{l+1} - h^l)\} \vec{g}_\tau \cdot \vec{u}_{o\tau} dA_\tau \\
 &\quad + \int_{A_\tau} q_{o\tau} \vec{n}_\tau \cdot \vec{u}_{o\tau} dA_\tau + \int_{\partial A_{N_\tau}} \left\{ \vec{N}_\tau \cdot \vec{u}_{o\tau} - \vec{M}_\tau \cdot \vec{\theta}_\tau \right\} ds_\tau \\
 g_v(\Omega_\tau) &= \int_{A_\tau} 1 dA_\tau \\
 g_p(\Omega_\tau) &= \int_{\partial A_\tau} 1 ds_\tau.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

No entanto, como problema é auto-adjunto, ver Eq. (3.44), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}_\tau(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{\lambda}_{u_{o\tau}}, \vec{\lambda}_{\theta_\tau}) \\
 = J_{\mu_\tau}(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{\lambda}_{u_{o\tau}}, \vec{\lambda}_{\theta_\tau}) - \left\{ a(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau) \right. \\
 \left. + 2 \int_{\partial A_{D_\tau}} \left\{ \vec{\lambda}_{u_{o\tau}} \cdot \vec{u}_{o\tau} + \vec{\lambda}_{\theta_\tau} \cdot \vec{\theta}_\tau \right\} ds_\tau - l(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau) \right\},
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

sendo

$$\begin{aligned}
 J_{\mu_\tau}(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{\lambda}_{u_{o\tau}}, \vec{\lambda}_{\theta_\tau}) &= J_\tau(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{\lambda}_{u_{o\tau}}, \vec{\lambda}_{\theta_\tau}) \\
 &\quad + \mu_v g_v(\Omega_\tau) + \mu_p g_p(\Omega_\tau) \\
 J_\tau(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{\lambda}_{u_{o\tau}}, \vec{\lambda}_{\theta_\tau}) &= l(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau).
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}_\tau(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{\lambda}_{u_{o\tau}}, \vec{\lambda}_{\theta_\tau}) \\
 = 2 l(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau) - a(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau) \\
 - 2 \int_{\partial A_{D_\tau}} \left\{ \vec{\lambda}_{u_{o\tau}} \cdot \vec{u}_{o\tau} + \vec{\lambda}_{\theta_\tau} \cdot \vec{\theta}_\tau \right\} ds_\tau \\
 + \mu_v g_v(\Omega_\tau) + \mu_p g_p(\Omega_\tau).
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Como resultado:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} \{ \tilde{L}_\tau(\Omega_\tau, \circ) \} &= \frac{d}{d\tau} \{ \mu_v g_v(\Omega_\tau) + \mu_p g_p(\Omega_\tau) \} \\
 + 2 \frac{d}{d\tau} \left\{ l(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau) \right\} &- \frac{d}{d\tau} \left\{ a(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau) \right\} \\
 - 2 \frac{d}{d\tau} \left\{ \int_{\partial A_{D_\tau}} \left\{ \vec{\lambda}_{u_{o\tau}} \cdot \vec{u}_{o\tau} + \vec{\lambda}_{\theta_\tau} \cdot \vec{\theta}_\tau \right\} ds_\tau \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Por simplicidade, a diferenciação de cada termo acima será descrito separadamente, como se segue:

• Do termo (1), dado por

$$(1) \equiv l \left( \Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau \right) = \int_{A_\tau} \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \right\} \vec{g}_\tau \cdot \vec{u}_{o\tau} dA_\tau \\ + \int_{\partial A_{N_\tau}} \left\{ \vec{N}_\tau \cdot \vec{u}_{o\tau} - \vec{M}_\tau \cdot \vec{\theta}_\tau \right\} ds_\tau + \int_{A_\tau} q_{o\tau} \vec{n}_\tau \cdot \vec{u}_{o\tau} dA_\tau, \quad (3.54)$$

tem-se

$$\frac{d}{d\tau} \{(1)\} = \frac{d}{d\tau} \left\{ \int_{A_\tau} \vec{b}_\tau \cdot \vec{u}_{o\tau} dA_\tau \right\} + \frac{d}{d\tau} \left\{ \int_{\partial A_{N_\tau}} \left\{ \vec{N}_\tau \cdot \vec{u}_{o\tau} - \vec{M}_\tau \cdot \vec{\theta}_\tau \right\} ds_\tau \right\} \\ + \frac{d}{d\tau} \left\{ \int_{A_\tau} q_{o\tau} \vec{n}_\tau \cdot \vec{u}_{o\tau} dA_\tau \right\} \\ \text{sendo} \\ \vec{b}_\tau = \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \right\} \vec{g}_\tau \quad (3.55)$$

em que

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ l \left( \Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau \right) \right\} = \int_{A_\tau} \vec{b}_\tau(\vec{y}_\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \vec{u}_{o\tau}(\vec{y}_\tau) \right\} dA_\tau \\ + \int_{\partial A_{O_\tau}} \left\{ \vec{b}_\tau(\vec{y}_\tau) \cdot \vec{u}_{o\tau}(\vec{y}_\tau) \right\} \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) \cdot \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) ds_\tau \\ + \int_{A_\tau} \vec{b}_\tau^q(\vec{y}_\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \vec{u}_{o\tau}(\vec{y}_\tau) \right\} dA_\tau \\ + \int_{\partial A_{O_\tau}} \left\{ \vec{b}_\tau^q(\vec{y}_\tau) \cdot \vec{u}_{o\tau}(\vec{y}_\tau) \right\} \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) \cdot \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) ds_\tau \\ + \int_{\partial A_{N_\tau}} \vec{N}_\tau(\vec{y}_\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \vec{u}_{o\tau}(\vec{y}_\tau) \right\} ds_\tau \\ - \int_{\partial A_{N_\tau}} \vec{M}_\tau(\vec{y}_\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \vec{\theta}_\tau(\vec{y}_\tau) \right\} ds_\tau \quad (3.56)$$

no qual

$$\vec{b}_\tau(\vec{y}_\tau) = \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \right\} \vec{g}_o = Cte \\ \vec{b}_\tau^q = q_o \vec{e}_z. \quad (3.57)$$

• Termo (2), dado por

$$(2) \equiv a \left( \Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau \right) \\ = \int_{A_\tau} [\mathbf{D}] \vec{\kappa} \left( \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau \right) \cdot \vec{\kappa} \left( \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau \right) dA_\tau, \quad (3.58)$$



tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{(2)\} &= 2 \int_{A_\tau} [\mathbf{D}] \vec{\mathbf{k}}(\vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau) \cdot \vec{\mathbf{k}} \left( \frac{\partial \vec{u}_{o\tau}}{\partial \tau}, \frac{\partial \vec{\theta}_\tau}{\partial \tau} \right) dA_\tau \\ &+ \int_{\partial A_\tau} \left\{ [\mathbf{D}] \vec{\mathbf{k}}(\vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau) \cdot \vec{\mathbf{k}}(\vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau) \right\} v_{N_\tau} ds_\tau. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left\{ a \left( \Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau \right) \right\} &= 2 \int_{A_\tau} [\mathbf{D}] \vec{\mathbf{k}}(\vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau) \cdot \vec{\mathbf{k}} \left( \frac{\partial \vec{u}_{o\tau}}{\partial \tau}, \frac{\partial \vec{\theta}_\tau}{\partial \tau} \right) dA_\tau \\ &+ \int_{\partial A_{0\tau}} \left\{ [\mathbf{D}] \vec{\mathbf{k}}(\vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau) \cdot \vec{\mathbf{k}}(\vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau) \right\} v_{N_\tau} \end{aligned}$$

com

$$v_{N_\tau}(\vec{y}_\tau) = \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) \cdot \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau).$$

(3.59)

• Termo (3), dado por

$$(3) \equiv \int_{\partial A_{D\tau}} \left( \vec{\lambda}_{u_{o\tau}} \cdot \vec{u}_{o\tau} + \vec{\lambda}_{\theta_\tau} \cdot \vec{\theta}_\tau \right) ds_\tau, \quad (3.60)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{(3)\} &= \int_{\partial A_{D\tau}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \vec{\lambda}_{u_{o\tau}} \right\} \cdot \vec{u}_{o\tau} + \vec{\lambda}_{u_{o\tau}} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \vec{u}_{o\tau} \} ds_\tau \\ &+ \int_{\partial A_{D\tau}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \vec{\lambda}_{\theta_\tau} \right\} \cdot \vec{\theta}_\tau + \vec{\lambda}_{\theta_\tau} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \vec{\theta}_\tau \} ds_\tau. \end{aligned} \quad (3.61)$$

• Termo (4), dado por

$$(4) \equiv g_v(\Omega_\tau) = \int_{A_\tau} 1 dA_\tau, \quad (3.62)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{g_v(\Omega_\tau)\} &= \int_{\partial A_\tau} \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) \cdot \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) ds_\tau \\ \text{consequentemente} \\ \frac{d}{d\tau} \{g_v(\Omega_\tau)\} \Big|_{\tau=0} &= \int_{\partial A_o} \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) ds_o. \end{aligned} \quad (3.63)$$

• Termo (5), dado por

$$(5) \equiv g_p(\Omega_\tau, \vec{u}_\tau) = \int_{\partial A_\tau} 1 ds_\tau, \quad (3.64)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{g_p(\Omega_\tau)\} &= \int_{\partial A_\tau} H_\tau(\vec{y}_\tau) \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) \cdot \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) ds_\tau \\ \text{consequentemente} \\ \frac{d}{d\tau} \{g_p(\Omega_\tau)\} \Big|_{\tau=0} &= \int_{\partial A_o} H_o(\vec{x}) \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) ds_o \\ \text{com} \\ H_o(\vec{x}) &= \text{div}[\vec{n}_o(\vec{x})]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Resumindo-se os resultados acima e obtém-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{\tilde{L}_\tau(\Omega_\tau, \circ)\} \Big|_{\tau=0} &= \mu_v \int_{\partial A_o} \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) ds_o + \mu_p \int_{\partial A_o} H_o(\vec{x}) \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) ds_o \\ &+ 2 \int_{A_o} \vec{b}_o \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \{\vec{u}_o\} dA_o + 2 \int_{\partial A_o} \left\{ \vec{b}_o \cdot \vec{u}_o \right\} \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) ds_o \\ &+ 2 \int_{A_o} \vec{b}_o^q \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \{\vec{u}_o\} dA_o + 2 \int_{\partial A_o} \left\{ \vec{b}_o^q \cdot \vec{u}_o \right\} \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) ds_o \\ &+ 2 \int_{\partial A_N} \vec{N}_o \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \{\vec{u}_o\} ds_o - 2 \int_{\partial A_N} \vec{M}_o \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \vec{\theta} \right\} ds_o \\ &- 2 \int_{A_o} [\mathbf{D}] \vec{\kappa}(\vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau) \cdot \vec{\kappa} \left( \frac{\partial \vec{u}_o}{\partial \tau}, \frac{\partial \vec{\theta}}{\partial \tau} \right) dA_o \\ &- \int_{\partial A_o} \left\{ [\mathbf{D}] \vec{\kappa}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) \cdot \vec{\kappa}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) \right\} \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) ds_o \\ &- 2 \int_{\partial A_{D_o}} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \vec{\lambda}_{u_o} \right\} \cdot \vec{u}_o + \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \vec{\lambda}_\theta \right\} \cdot \vec{\theta} \right) ds_o \\ &- 2 \int_{\partial A_{D_o}} \left( \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \{\vec{u}_o\} + \vec{\lambda}_\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \{\vec{\theta}\} \right) ds_o \end{aligned} \quad (3.66)$$

sendo

$$\begin{aligned} \vec{b}_o &= \sum_{l=1}^n \{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \} \vec{g}_o = Cte \\ \vec{b}_o^q &= q_o \vec{e}_z = Cte. \end{aligned} \quad (3.67)$$

• Entretanto, como  $\left( \frac{\partial \vec{u}_{o\tau}}{\partial \tau}, \frac{\partial \vec{\theta}_\tau}{\partial \tau}, \frac{\partial \vec{\lambda}_{u_{o\tau}}}{\partial \tau}, \frac{\partial \vec{\lambda}_{\theta_\tau}}{\partial \tau} \right) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H}$ , para campos suficientemente suaves, tem-se que a forma fraca em (3.36) formulada como:

$$\begin{aligned} \text{Dado } \Omega_\tau, \text{ determinar } \left( \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{\lambda}_{u_{o\tau}}, \vec{\lambda}_{\theta_\tau} \right) &\in \mathbf{W} \times \mathbf{H} \text{ solução de} \\ a \left( \Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \delta \vec{p}_{u_{o\tau}}, \delta \vec{p}_{\theta_\tau} \right) &+ \int_{\partial A_{D\tau}} \left( \vec{\lambda}_{u_{o\tau}} \cdot \delta \vec{p}_{u_{o\tau}} + \vec{\lambda}_{\theta_\tau} \cdot \delta \vec{p}_{\theta_\tau} \right) ds_\tau \\ &+ \int_{\partial A_{D\tau}} \left( \vec{u}_{o\tau} \cdot \delta \vec{q}_{\lambda_{u_{o\tau}}} + \vec{\theta}_\tau \cdot \delta \vec{q}_{\lambda_{\theta_\tau}} \right) ds_\tau = l(\Omega_\tau, \delta \vec{p}_{u_{o\tau}}, \delta \vec{p}_{\theta_\tau}) \\ \forall \left( \delta \vec{p}_{u_{o\tau}}, \delta \vec{p}_{\theta_\tau}, \delta \vec{q}_{\lambda_{u_{o\tau}}}, \delta \vec{q}_{\lambda_{\theta_\tau}} \right) &\in \mathbf{W} \times \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

é também satisfeita por  $\left( \frac{\partial \vec{u}_{o\tau}}{\partial \tau}, \frac{\partial \vec{\theta}_\tau}{\partial \tau}, \frac{\partial \vec{\lambda}_{u_{o\tau}}}{\partial \tau}, \frac{\partial \vec{\lambda}_{\theta_\tau}}{\partial \tau} \right) \Leftrightarrow \left( \delta \vec{p}_{u_{o\tau}}, \delta \vec{p}_{\theta_\tau}, \delta \vec{q}_{\lambda_{u_{o\tau}}}, \delta \vec{q}_{\lambda_{\theta_\tau}} \right)$ ,

i.e.,

Dado  $\Omega_\tau$ , determinar  $(\vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{\lambda}_{u_{o\tau}}, \vec{\lambda}_{\theta_\tau}) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H}$  solução de

$$\begin{aligned} \int_{A_\tau} [\mathbf{D}] \vec{\kappa}(\vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau) \cdot \vec{\kappa} \left( \frac{\partial \vec{u}_{o\tau}}{\partial \tau}, \frac{\partial \vec{\theta}_\tau}{\partial \tau} \right) dA_\tau + \int_{\partial A_{D\tau}} \left( \vec{\lambda}_{u_{o\tau}} \cdot \frac{\partial \vec{u}_{o\tau}}{\partial \tau} + \vec{\lambda}_{\theta_\tau} \cdot \frac{\partial \vec{\theta}_\tau}{\partial \tau} \right) ds_\tau \\ + \int_{\partial A_{D\tau}} \left( \vec{u}_{o\tau} \cdot \frac{\partial \vec{\lambda}_{u_{o\tau}}}{\partial \tau} + \vec{\theta}_\tau \cdot \frac{\partial \vec{\lambda}_{\theta_\tau}}{\partial \tau} \right) ds_\tau = \int_{A_\tau} \vec{b}_\tau \cdot \frac{\partial \vec{u}_{o\tau}}{\partial \tau} dA_\tau \\ + \int_{\partial A_{N\tau}} \left\{ \vec{N}_\tau \cdot \frac{\partial \vec{u}_{o\tau}}{\partial \tau} - \vec{M}_\tau \cdot \frac{\partial \vec{\theta}_\tau}{\partial \tau} \right\} ds_\tau + \int_{A_\tau} \vec{b}_\tau^q \cdot \frac{\partial \vec{u}_{o\tau}}{\partial \tau} dA_\tau \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} \vec{b}_\tau &= \sum_{l=1}^n \{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \} \vec{g}_\tau \\ \vec{b}_\tau^q &= q_\tau \vec{n}_\tau. \end{aligned} \quad (3.69)$$

• Substituindo-se (3.69) em (3.66) fornece

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{ \tilde{L}_\tau(\Omega_\tau, \circ) \} \Big|_{\tau=0} &= \mu_v \int_{\partial A_o} \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) ds_o + \mu_p \int_{\partial A_o} H_o(\vec{x}) \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) ds_o \\ &+ 2 \int_{\partial A_0} \left\{ \vec{b}_o \cdot \vec{u}_o \right\} \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) ds_o \\ &+ 2 \int_{\partial A_0} \left\{ \vec{b}_o^q \cdot \vec{u}_o \right\} \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) ds_o \\ &- \int_{\partial A_0} \left\{ [\mathbf{D}] \vec{\kappa}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) \cdot \vec{\kappa}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) \right\} \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) ds_o \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} \vec{b}_o &= \sum_{l=1}^n \{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \} \vec{g}_o = Cte \\ \vec{b}_o^q &= q_o \vec{e}_z = Cte. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Consequentemente:

$$D\tilde{L}(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{u}_o, \vec{\theta}) \left[ \vec{V}(\vec{x}) \right] = \frac{d}{d\tau} \left\{ \tilde{L}_\tau(\Omega_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau, \vec{u}_{o\tau}, \vec{\theta}_\tau) \right\} \Big|_{\tau=0}. \quad (3.71)$$

Como resultado,

$$\begin{aligned}
 D\bar{L}(\Omega, \vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{u}_o, \vec{\theta}) [\vec{V}(\vec{x})] = & \\
 = 2 \int_{\partial A_0} \left\{ \vec{b}_o \cdot \vec{u}_o \right\} \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) ds_o & \\
 + 2 \int_{\partial A_0} \left\{ \vec{b}_o^q \cdot \vec{u}_o \right\} \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) ds_o & \\
 - \int_{\partial A_0} \left\{ [\mathbf{D}] \vec{k}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) \cdot \vec{k}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) \right\} \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) ds_o & \quad (3.72) \\
 + \mu_v \int_{\partial A_0} \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) ds_o + \mu_p \int_{\partial A_0} H_o(\vec{x}) \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) ds_o &
 \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
 \vec{b}_o &= \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \right\} \vec{g}_o = Cte \\
 \vec{b}_o^q &= q_o \vec{e}_z = Cte.
 \end{aligned}$$

### 3.4 Abordagem Euleriana para a otimização de forma

#### 3.4.1 Derivação da equação de Hamilton-Jacobi

O processo de otimização é caracterizado pela evolução da forma (contorno) na direção de descida da função objetivo. A evolução é feita de forma implícita através da evolução da função *level set*, movimento este regido pela equação de transporte de Hamilton-Jacobi. A determinação da direção de descida requer a determinação da derivada normal ao contorno, com relação ao parâmetro  $\tau$ , resultante do mapeamento  $T_\tau(\vec{x}) = \vec{x} + \tau \vec{V}(\vec{x})$ , o qual caracteriza uma deformação do conjunto de nível zero da função *level set*, na direção do campo de velocidade  $\vec{V}(\vec{x})$ .

Para ser mais preciso, a determinação da derivada normal ao contorno consiste em supor que o domínio  $\bar{\Omega} = \{\vec{x} \mid \phi(\vec{x}) \geq 0\}$  é deformado pelo mapeamento  $T : \vec{x} \in \Omega \subset D \rightarrow \vec{y}_\tau \in \Omega_\tau \subset D$  dado por

$$\begin{aligned}
 \vec{y}_\tau &= T_\tau(\vec{x}) \equiv T(\vec{x}, \tau) = \vec{x} + \tau \vec{V}(\vec{x}) \\
 \text{para alguma função } \vec{V}(\vec{x}) \text{ conhecida, definida em } D, & \quad (3.73) \\
 \text{tal que no contorno } \vec{V}(\vec{x}) &= v_N(\vec{x}) \vec{n}(\vec{x})
 \end{aligned}$$

em que  $\vec{V}(\vec{x})$  é um vetor velocidade normal, com componente  $v_N(\vec{x})$ , e  $\vec{n}(\vec{x})$  é o vector unitário normal ao contorno  $\partial\Omega$ .

De acordo com o mapeamento proposto,  $T_\tau(\vec{x})$ , a forma  $\Omega$  evolui no tempo  $\tau \in R^+$  com uma velocidade  $\vec{V}(\vec{x})$  resultando em:

$$\Omega_\tau = T_\tau(\Omega). \quad (3.74)$$

O interior do corpo, dado pelo conjunto aberto  $\Omega$ , é definido em termos da função *level set*  $\phi(\vec{x})$  como:

$$\Omega = \{ \vec{x} \in D \mid \phi(\vec{x}) > 0 \}. \quad (3.75)$$

Supondo que a transformação  $T_\tau(\vec{x})$  é regular e invertível tem-se, para cada  $\tau \in R^+$ , que

$$\begin{aligned} \vec{y}_\tau &= T_\tau(\vec{x}) \\ \text{e} \\ \vec{x} &= T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Assim,  $\vec{y}_\tau$  pode ser visto como sendo o sistema de coordenadas empregados na descrição dos campos definidos em  $\Omega_\tau$  (perturbado/configuração deformada) e  $\vec{x}$  o sistema de coordenadas empregados na descrição dos campos definidos em  $\Omega$ . A abordagem Euleriana consiste em descrever o problema em termos de  $\vec{y}_\tau$ .

De acordo com o mapeamento na Eq. (3.76) pode-se representar a descrição Euleriana da função *level set* como:

$$\begin{aligned} \phi_\tau(\vec{y}_\tau) &= \phi(\vec{x})|_{\vec{x}=T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)} \\ \text{ou equivalentemente} \\ \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) &= \phi(\vec{x}) \\ \text{para cada } \tau &\in R^+. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \Omega_\tau &= \{ \vec{y}_\tau(\vec{x}) \in D \mid \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) > 0 \} \\ \text{sendo} \\ \vec{y}_\tau(\vec{x}) &= T_\tau(\vec{x}) = T(\vec{x}, \tau). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Com base na abordagem Euleriana, e a definição do contorno de  $\Omega_\tau$ , dada por

$$\begin{aligned} \partial\Omega_\tau &= \{ \vec{y}_\tau(\vec{x}) \in D \mid \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) = 0 \} \\ \text{sendo} \\ \phi_\tau(\vec{y}_\tau) &\equiv \phi(\vec{y}_\tau, \tau), \end{aligned} \quad (3.79)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \phi_\tau(\vec{y}_\tau) &= 0 \text{ para qualquer } \vec{y}_\tau \in \partial\Omega_\tau \text{ e cada } \tau \in R^+ \\ \text{ou} \\ \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) &= 0 \text{ para qualquer } \vec{x} \in \partial\Omega \text{ e cada } \tau \in R^+. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Diferenciando a Eq. (3.80) em termos de  $\tau$  resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_\tau(\vec{y}_\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi_\tau(\vec{y}_\tau)}{\partial \vec{y}_\tau} \frac{d\vec{y}_\tau}{d\tau} &= 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial \phi_\tau(\vec{y}_\tau)}{\partial \tau} + \langle \nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau), \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) \rangle &= 0 \\ \text{sendo} \\ \phi_\tau(\vec{y}_\tau) &\equiv \phi(\vec{y}_\tau, \tau) \\ \text{e} \\ \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) &= \vec{V}(\vec{x}) \Big|_{T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Por outro lado, para  $\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)$  da forma

$$\begin{aligned} \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) &= v_{N_\tau}(\vec{y}_\tau) \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) \\ \text{ou} \\ \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) &= v_{N_\tau}(\vec{y}_\tau(\vec{x})) \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})), \end{aligned} \quad (3.82)$$

tem-se:

$$\frac{\partial \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))}{\partial \tau} + v_{N_\tau}(\vec{y}_\tau(\vec{x})) \langle \nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})), \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) \rangle = 0. \quad (3.83)$$

Agora, como

$$\vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) = - \frac{\nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau)}{\|\nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau)\|} \Big|_{\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})}, \quad (3.84)$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))}{\partial \tau} - v_{N_\tau}(\vec{y}_\tau(\vec{x})) \|\nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))\| &= 0 \\ \text{sujeita, em } \tau = 0, \text{ à condição inicial, dada por} \\ \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))|_{\tau=0} &= \phi(\vec{x}) \\ \text{a qual é calculada como} \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\phi(\vec{x}) = \begin{cases} \min_{\vec{z} \in \partial\Omega} \|\vec{x} - \vec{z}\|, & \text{se } \vec{x} \in \bar{\Omega} \\ -\min_{\vec{z} \in \partial\Omega} \|\vec{x} - \vec{z}\|, & \text{se } \vec{x} \in D \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

A equação de Hamilton-Jacobi é definida em toda a caixa  $D$ , e não apenas sobre o contorno  $\partial\Omega_\tau$ , o que requer o conhecimento da velocidade  $\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)$  em todo o domínio  $D$ .

### 3.4.1.1 Formulação *level set*

O método *level set*, (PENG et al., 1999), considera o contorno  $\partial\Omega$  movendo em  $R^d$  com codimensão 1. Seja  $\Omega_\tau = T_\tau(\Omega)$  a região (possivelmente multiconecta) envolvida pelo contorno  $\partial\Omega_\tau$ . Associa-se a  $\Omega_\tau$  uma função auxiliar  $\phi(\vec{y}_\tau, \tau)$ , Lipschitz continua que satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{y}_\tau, \tau) &= 0 \iff \vec{y}_\tau \in \partial\Omega_\tau \cap D \\ \phi(\vec{y}_\tau, \tau) &> 0 \iff \vec{y}_\tau \in \Omega_\tau \\ \phi(\vec{y}_\tau, \tau) &< 0 \iff \vec{y}_\tau \in (D \setminus \bar{\Omega}_\tau).\end{aligned}\tag{3.86}$$

Como o contorno do corpo é definido por  $\partial\Omega_\tau = \{\vec{y}_\tau \in R^d \mid \phi(\vec{y}_\tau, \tau) = 0\}$ , deslocar a interface (contorno) é equivalente ao transporte de  $\phi(\vec{y}_\tau, \tau)$ , obtido pela resolução da equação de Hamilton-Jacobi, dada por

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi(\vec{y}_\tau, \tau)}{\partial\tau} - v_N(\vec{y}_\tau, \tau) \|\nabla_{\vec{y}_\tau} \phi(\vec{y}_\tau, \tau)\| &= 0 \\ \text{sujeita à condição inicial} & \\ \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))|_{\tau=0} &= \phi(\vec{x}).\end{aligned}\tag{3.87}$$

A condição inicial da função  $\phi(\vec{y}_0, 0) = \phi(\vec{x})$  é determinada segundo (MOURAD; DOLBOW; GARIKIPATI, 2005), como sendo a função distância sinalizada da interface, definida por

$$\phi(\vec{x}) = \begin{cases} \min_{\vec{z} \in \partial\Omega} \|\vec{x} - \vec{z}\|, & \text{se } \vec{x} \in \bar{\Omega} \\ -\min_{\vec{z} \in \partial\Omega} \|\vec{x} - \vec{z}\|, & \text{se } \vec{x} \in D \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}\tag{3.88}$$

Uma das características interessantes da formulação *level set* é que as quantidades geométricas, descritas abaixo, têm representações simples em termos de  $\phi_\tau(\vec{y}_\tau) \equiv \phi(\vec{y}_\tau, \tau)$ , i.e.,

$$\begin{aligned}\vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) &= -\frac{\nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau)}{\|\nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau)\|} \\ H_\tau(\vec{y}_\tau) &= \text{div}[\vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau)] \\ \text{Per}(\Omega_\tau) &\equiv |\partial\Omega_\tau| = \int_D \delta(\phi_\tau(\vec{y}_\tau)) \|\nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau)\| d\Omega \\ \text{e} & \\ \text{Vol}(\Omega_\tau) &\equiv |\Omega_\tau| = \int_D h(\phi_\tau(\vec{y}_\tau)) d\Omega;\end{aligned}\tag{3.89}$$

sendo  $\delta(\phi)$  a distribuição de Dirac 1D,  $h(\phi_\tau)$  a função heaviside 1D, e  $H_\tau(\vec{y}_\tau)$  a curvatura média positiva. Em 2D,  $|\partial\Omega_\tau|$  é simplesmente o comprimento do arco de  $\partial\Omega_\tau$  e  $|\Omega_\tau|$  a área de  $\Omega_\tau$ ; enquanto em 3D,  $|\partial\Omega_\tau|$  é a

área de superfície de  $\partial\Omega_\tau$  e  $|\Omega_\tau|$  o volume de  $\Omega_\tau$ .

Note que:

- A extensão do campo de velocidade  $v_{N_\tau}(\vec{y}_\tau)$  para todo o domínio  $D$  é obtido de forma natural pelo método *level set*.
- A estabilidade do algoritmo requer que a evolução da função *level set* seja tal que

$$0 < c \leq \|\nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau)\| \leq C \quad (3.90)$$

para alguma constante  $c$  e  $C$ . De fato, é desejável que, ao longo do processo de otimização, a função *level set*,  $\phi_\tau(\vec{y}_\tau)$ , seja uma boa aproximação da função distância sinalizada, a qual satisfaz a condição

$$\|\nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau)\| = 1. \quad (3.91)$$

Observe que, se  $\phi_\tau(\vec{y}_\tau)$  é uma função distância sinalizada, então automaticamente satisfaz  $\|\nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau)\| = 1$ . No entanto, isso só ocorre, no algoritmo, para  $\tau = 0$ , ou seja,  $\|\nabla_{\vec{x}} \phi(\vec{x})\| = 1$ . Para um tempo diferente,  $\tau$ ,  $\phi_\tau(\vec{y}_\tau)$  é obtida resolvendo a equação de Hamilton-Jacobi. Assim, devido à dissipação numérica, a propriedade acima, característica da função distância sinalizada, pode ser perdida. Devido a esta perda de propriedade torna-se necessário a reinicialização da função *level set*. Este processo de reinicialização requer a solução de uma nova equação do tipo transporte, a qual será abordada mais à frente.

### 3.5 Principais vantagens do método *level set* para otimização de forma

Várias características e vantagens do presente método, que representam a forma sólida desconhecida através da função *level set*  $\phi_\tau(\vec{y}_\tau)$ , tornam-se evidentes:

1. Primeiro, os métodos *level set* para otimização são topologicamente flexíveis. A função escalar  $\phi_\tau(\vec{y}_\tau)$  é definida para ter sempre uma topologia simples e a representação não depende de qualquer tipo de parametrização explícita. A representação da forma é tão geral quanto a teoria física subjacente. Estas capacidades permitem aos métodos *level set* mudar facilmente a topologia e a forma ótima de componentes e estruturas, sendo capazes de formar vazios, dividir e formar vários contornos, ou fundir com outros contornos para formar uma superfície



única, em contraste com a forma do contorno de qualquer projeto convencional (SETHIAN, 1999).

2. Uma vez que a forma geométrica (contorno) é restrita a ser a curva de nível zero da função *level set*,  $\phi_\tau(\vec{y}_\tau)$ , o movimento do conjunto de nível é obtido pela solução da equação de Hamilton-Jacobi, sendo o movimento ao longo da direção normal à curva de nível,  $\phi_\tau(\vec{y}_\tau)$ , conduzido pela velocidade normal  $v_{N_\tau}(\vec{y}_\tau) = \langle \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau), \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) \rangle$ . Por conseguinte, a alteração da forma geométrica é também incorporada apenas na sua direção normal. É bem conhecido em geometria diferencial, que para um vetor velocidade geral  $\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)$ , a componente tangencial não influencia na geometria da forma ou contorno ótimo, sendo responsável apenas por uma mudança na parametrização. Desta forma, os métodos *level set* de otimização fazem uso apenas da componente normal à superfície do contorno.
3. Na teoria de otimização de forma, clássica, existe um conceito importante do campo de velocidade de deformação da forma. Baseado em idéias da mecânica do contínuo, verifica-se que as derivadas da forma, para uma transformação  $\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})$ , existem apenas na direção normal ao contorno. Neste contexto, o princípio subjacente da otimização da forma clássica é encontrar uma escolha adequada do campo de velocidade normal  $v_{N_\tau}(\vec{y}_\tau) = \langle \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau), \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) \rangle$  para assegurar uma sequência convergente para a forma ótima do contorno. Claramente, o modelo *level set* fornece um caminho natural para acomodar esse requisito. Isto é obtido pela incorporação da componente normal da velocidade,  $v_{N_\tau}(\vec{y}_\tau)$ , na equação de Hamilton-Jacobi, responsável pelo transporte da função *level set* de modo a assegurar uma redução da função objetivo  $J(\vec{u}_\tau(\vec{y}_\tau), \Omega_\tau)$ .



## 4 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo é apresentada a implementação numérica da formulação do problema de otimização. São apresentadas as discretizações, tanto no espaço quanto no tempo, das equações de Hamilton-Jacobi e da equação de reinicialização. A discretização espacial da equação de Hamilton-Jacobi é feita pelo método de Galerkin livre de elementos (BELYTSCHKO; LU; GU, 1994) e sua discretização temporal é feita pelo método das diferenças finitas, utilizando um esquema de *upwind* (*Petrov-Galerkin*) (BROOKS; HUGHES, 1982). A discretização espacial da equação de reinicialização é feita pelo método Galerkin livre de elementos e sua discretização temporal é feita pelo método das diferenças finitas. São apresentadas também a discretização da equação de estado, feita pelo método de Galerkin livre de elementos, e a descrição do algoritmo associado ao problema de otimização.

### 4.1 Solução da equação *level set*

A equação de Hamilton-Jacobi, descrevendo a evolução da função *level set*, é expressa por

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} - v_N(\vec{x}, \tau) \|\nabla_{\vec{x}} \phi(\vec{x}, \tau)\| = 0, \quad (4.1)$$

estando sujeita à condição inicial:

$$\phi(\vec{x}, 0) = \phi_o(\vec{x}). \quad (4.2)$$

A condição de contorno é, para cada  $\tau \in R^+$ , dada por

$$\phi(\vec{x}, \tau) = 0 \text{ em } \vec{x} \in D. \quad (4.3)$$

Devido ao fato da equação de Hamilton-Jacobi ser fortemente advectiva, a aplicação de métodos clássicos de Galerkin podem resultar em oscilações indesejadas na sua solução. De modo a contornar estes problemas de estabilidade do algoritmo, é aplicado o método de Galerkin livre de elementos conjuntamente com um esquema *upwind*, i.e., pelo *streamline diffusion element free Galerkin method*, (SDEFGM). A condição de contorno é do tipo Dirichlet, dada por  $\phi(\vec{x}, \tau) = 0$ , aplicada na fronteira do domínio de projeto fixo  $D$ .

A vantagem do método proposto é que a otimização estrutural,

em domínios de projeto irregular, pode ser realizada facilmente utilizando partições do domínio utilizando malhas não-estruturadas (células de integração). Além disso, uma vez que é empregado o método de Galerkin livre de elementos, a discretização do problema torna-se menos sensível à orientação da malha, principalmente em partições estruturadas do domínio. Por outro lado, por meio de uma função de peso regulares, pode-se obter uma solução com a regularidade desejada tanto para a equação de Hamilton-Jacobi como também para a equação de reinicialização.

O método *level set* tornou-se uma técnica emergente para otimização estrutural de forma e topológica devido a sua capacidade de poder lidar com mudanças na topologia de forma simples e obter contornos suaves, quando comparados com métodos clássicos. Na maioria das aplicações, a equação de Hamilton-Jacobi é implementada com a técnica de diferenças finitas utilizando um esquema *upwind* (ALLAIRE; JOUVE; TOADER, 2004). Estes métodos funcionam bem numa rede estruturada, mas apresentam dificuldades quando são aplicados a problemas que envolvem geometrias e fronteiras complexas, em que a discretização espacial com a rede estruturada não é possível.

A vantagem do método de Galerkin livre de elementos (MEFG) é sua habilidade em lidar com domínios arbitrários e gerar soluções aproximadas suaves tanto para a equação de Hamilton-Jacobi quanto para a equação de reinicialização.

Existem basicamente duas etapas no processo de otimização estrutural via *level set* que são: a fase de solução da equação de estado (problema da placa de Mindlin) e a fase do transporte e recuperação da função *level set*. A primeira fase é resolvida pelo EFGM resultando em soluções suaves para o problema da placa de Mindlin e para a velocidade normal, determinada pela análise de sensibilidade, a qual é utilizada na equação de transporte de Hamilton-Jacobi.

Na segunda fase são resolvidas as equações de Hamilton-Jacobi, pelo SDEFGM e de reinicialização pelo EFGM juntamente com o método de diferenças finitas. A equação de Hamilton-Jacobi é uma equação hiperbólica de primeira ordem do tipo advectiva o que requer para sua estabilização a aplicação de esquemas do tipo *upwind*.

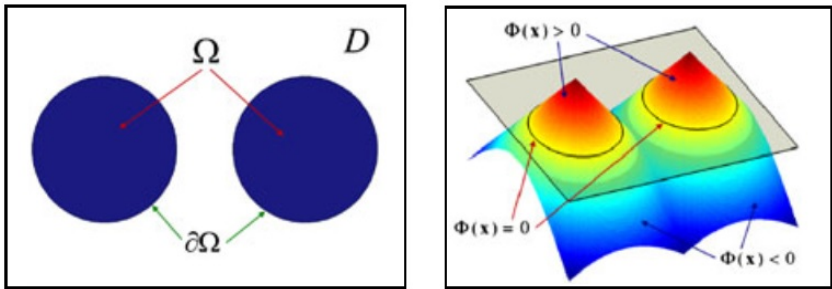
Um método comumente aplicado na literatura para a solução da equação de Hamilton-Jacobi é o método dos elementos finitos. Barth e Sethian são os primeiros a discretizar a equação *level set* em malhas não estruturadas usando técnicas de elementos finitos (BARTH; SETHIAN, 1998). Além disso, algumas outras técnicas de elementos finitos foram implementadas para a solução de problemas de otimização e de evolução de interfaces

usando *level set*, como: *Streamline upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) (CODINA; OÑATE; CERVERA, 1992), *the Galerkin least squares method* (GLSM) (THOMPSON; PINSKY, 1995), *the Taylor Galerkin and the characteristic Galerkin methods* (LEE; LIN, 2001), *the discontinuous Galerkin method* (DGM) and *the least squares finite element method* (LSFEM). Outra abordagem, é a de eliminar o termo de advecção usando o chamado *assumed gradient method* o que possibilita resolver a equação utilizando o Método padrão de Elementos Finitos (MEF).

Neste trabalho, a equação de Hamilton-Jacobi é resolvida pelo SDEFGM, i.e., utilizando o *Streamline upwind/Petrov-Galerkin method*.

#### 4.1.1 Descrição do método level set

No método *level set*, o contorno do corpo a ser otimizado é representado implicitamente através de uma função *level set*  $\phi(\vec{x}, \tau)$ , a qual, para cada  $\tau$ , é uma função escalar definida em um domínio de projeto fixo  $D$ . Neste trabalho, define-se o contorno como sendo a curva de nível zero da função level set. O interior do corpo (estrutura) como sendo o domínio onde  $\phi(\vec{x}, \tau) > 0$  e o exterior do corpo como sendo o domínio onde  $\phi(\vec{x}, \tau) < 0$ . Esta representação pode ser visualizada na Figura 4.1.



**Figura 4.1:** Representação da função level set no domínio em 2D e no espaço 3D (LUO et al., 2012).

O método *level set* adiciona dinâmica ao contorno definido implicitamente e sua evolução é governada pela equação de Hamilton-Jacobi, i.e.,

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} - v_N(\vec{x}, \tau) \|\nabla_{\vec{x}} \phi(\vec{x}, \tau)\| = 0, \quad (4.4)$$

em que  $v_N(\vec{x}, \tau)$  é a velocidade normal, obtida a partir da análise de sensibilidade utilizando dados derivados da solução da equação de estado, representando neste trabalho o problema da placa de Mindlin. Assim, uma vez que a velocidade é calculada usando o resultado da análise de sensibilidade, pode-se atualizar o contorno da estrutura resolvendo a Eq. (4.4).

Durante a evolução, a função *level set* frequentemente se torna demasiada plana ou muito acentuada, o que pode introduzir erros numéricos trazendo instabilidade ao algoritmo utilizado na solução da equação de Hamilton-Jacobi. A fim de regularizar a função *level set*, reinicializa-se periodicamente resolvendo a equação de reinicialização, dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\vec{x}, \bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}} + \vec{w}(\vec{x}, \bar{\tau}) \cdot \nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \bar{\tau}) \\ - \operatorname{div} [\varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \bar{\tau})] = \operatorname{sign}(\vec{x}, \bar{\tau}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

sendo

$$\begin{aligned} \vec{w}(\vec{x}, \bar{\tau}) = \operatorname{sign}(\vec{x}, \bar{\tau}) \frac{\nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \bar{\tau})}{\|\nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \bar{\tau})\|} \\ \operatorname{sign}(\vec{x}, \bar{\tau}) = \frac{\psi(\vec{x}, 0)}{\sqrt{\psi(\vec{x}, 0)^2 + \alpha_a}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

sujeito à condição inicial

$$\psi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \tau_n), \quad (4.7)$$

no passo  $\tau_n$  da equação de Hamilton-Jacobi e à condição fronteira natural

$$\nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \tau) = 0 \text{ at } (\vec{x}, \tau) \in \partial D \times [0, \infty). \quad (4.8)$$

em que  $\alpha_a$  um parâmetro suficientemente pequeno e  $\varepsilon$  um termo de difusão.

## 4.2 Solução da equação de transporte *level set* pelo método SDEFGM

### 4.2.1 Processo de estabilização via *Stream Line Petrov-Galerkin method*

A fim de obter a forma fraca incremental da equação de Hamilton-Jacobi, define-se  $r(\vec{x}, \tau)$  como sendo o resíduo da equação advectiva de Hamilton-Jacobi, ou seja

$$r(\vec{x}, \tau) = \frac{\partial \phi(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} - v_N(\vec{x}, \tau) \|\nabla_{\vec{x}} \phi(\vec{x}, \tau)\| \quad (4.9)$$

a qual pode ser também expressa como

$$r(\vec{x}, \tau) = \frac{\partial \phi(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} + \left\langle \vec{V}(\vec{x}, \tau), \nabla_{\vec{x}} \phi(\vec{x}, \tau) \right\rangle$$

sendo

$$\vec{V}(\vec{x}, \tau) = v_N(\vec{x}, \tau) \vec{n}(\vec{x}, \tau) \text{ com } \vec{n}(\vec{x}, \tau) = -\frac{\nabla_{\vec{x}} \phi(\vec{x}, \tau)}{\|\nabla_{\vec{x}} \phi(\vec{x}, \tau)\|}. \quad (4.10)$$

Fazendo uma partição do domínio do tempo em incrementos uniformes  $\Delta \tau$  e aplicando o método de Euler explícito entre  $\tau_n$  e  $\tau_{n+1}$ , obtemos, para o resíduo em  $\tau_n$ , a seguinte expressão

$$r(\vec{x}, \tau_n) = \frac{\phi(\vec{x}, \tau_{n+1}) - \phi(\vec{x}, \tau_n)}{\Delta \tau} - v_N(\vec{x}, \tau_n) \|\nabla_{\vec{x}} \phi(\vec{x}, \tau_n)\|$$

sendo

$$\left. \frac{\partial \phi(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=\tau_n} = \frac{\phi(\vec{x}, \tau_{n+1}) - \phi(\vec{x}, \tau_n)}{\Delta \tau}. \quad (4.11)$$

Denotando-se

$$\begin{aligned} r^n &= r(\vec{x}, \tau_n) \\ \phi^n &= \phi(\vec{x}, \tau_n) \\ \phi^{n+1} &= \phi(\vec{x}, \tau_{n+1}) \\ v_N^n &= v_N(\vec{x}, \tau_n); \end{aligned} \quad (4.12)$$

A forma fraca incremental da equação de Hamilton-Jacobi pode ser então formulada como: Dado  $v_N^n$  e  $\phi^n$ , determinar  $\phi^{n+1}$  tal que

$$\int_D r^n \left( \phi + \frac{h}{2|v_N^n|} \left\langle \vec{V}^n, \nabla_{\vec{x}} \phi \right\rangle \right) d\Omega = 0, \quad \forall \phi \in \mathbf{W}_h^\phi$$

em que

$$\vec{V}^n = v_N^n \vec{n}^n \text{ e } \vec{n}^n = -\frac{\nabla_{\vec{x}} \phi^n}{\|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\|}. \quad (4.13)$$

Observe-se que:  $\|\vec{V}^n\| = |v_N^n|$ .

Na expressão acima,  $h$  é alguma medida do tamanho local da partição triangular da malha em células de integração. Além disso, aqui  $\phi$  é entendida como uma função de teste pertencente a um espaço de aproximação adequado  $\mathbf{W}_h^\phi$ . A estabilização é, portanto, dependente do campo de velocidade  $v_N(\vec{x}, \tau)$ , adicionando uma certa quantidade controlada de difusão na direção das características.

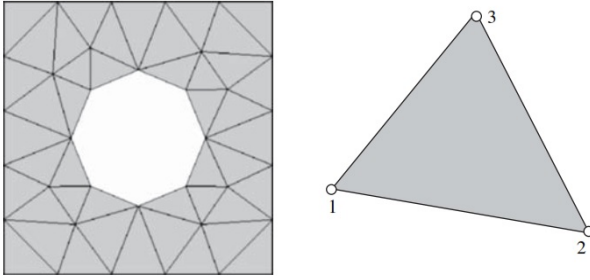
Assim, a forma fraca incremental da equação de Hamilton-Jacobi pode

ser formulada como: Dado  $v_N^n$  e  $\phi^n$ , determinar  $\phi^{n+1}$  que resolve:

$$\begin{aligned}
 \int_D \phi^{n+1} \varphi \, d\Omega + \int_D \delta_a \phi^{n+1} \left\langle \vec{V}^n, \nabla_{\vec{x}} \varphi \right\rangle d\Omega &= \int_D \phi^n \varphi \, d\Omega \\
 + \triangle \tau \int_D v_N^n \|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\| \varphi \, d\Omega + \int_D \delta_a \phi^n \left\langle \vec{V}^n, \nabla_{\vec{x}} \varphi \right\rangle d\Omega \\
 + \triangle \tau \int_D \delta_a v_N^n \|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\| \left\langle \vec{V}^n, \nabla_{\vec{x}} \varphi \right\rangle d\Omega, \quad \forall \varphi \in \mathbf{W}_h^\phi
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

sendo  $\delta_a = \frac{h}{2|v_N^n|}$ .

A fim de resolver este problema emprega-se uma partição do domínio descrito, em células de integração do tipo Tri3, descrita na Figura 4.2.



**Figura 4.2:** Aproximação do limite curvo usando três nós de elementos finitos triangulares (FISH; BELYTSCHKO, 2007).

#### 4.2.2 Discretização da equação incremental de Hamilton-Jacobi

A fim de aplicar o SDEFGM, realiza-se uma discretização do domínio em células de integração triangulares como ilustradas na Figura 4.2. Por conveniência, visando a simplificação da integração nas células triangulares, introduz-se uma mudança de variáveis determinada pelas relações

$$\begin{aligned}
 x &= x(\xi, \eta) = x_{a_i} N_i(\xi, \eta) \\
 y &= y(\xi, \eta) = y_{a_i} N_i(\xi, \eta),
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

sendo  $N_i(\xi, \eta)$  as funções Tri3 clássicas, utilizadas pelo método dos elementos finitos (DHATT; LEFRANÇOIS; TOUZOT, 2012). A função *level set*  $\phi^n(x, y)$



e a função teste  $\varphi(x, y)$  são aproximadas utilizando-se as bases globais  $\Phi_I(\vec{x}(\xi, \eta))$  construídas pelo método dos mínimos quadrados móveis, como

$$\phi^n(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^N \Phi_I(\vec{x}(\xi, \eta)) \phi_I^n \quad (4.16)$$

$$\varphi(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^N \Phi_I(\vec{x}(\xi, \eta)) \varphi_I^n.$$

Denota-se:

$$\left\{ \vec{U}_\phi^n \right\}^T = \left\{ \phi_1^n \quad \phi_2^n \quad \dots \quad \phi_N^n \right\}, \quad (4.17)$$

em que  $(\phi_{a_i}^n)$  representa o  $a_i$ -ésimo parâmetro associado à função base de aproximação global,  $\Phi_I(\vec{x}(\xi, \eta))$ . Pode-se, de forma compacta, expressar a função *level set*  $\phi^n(x, y)$  e função teste  $\varphi(x, y)$  como

$$\begin{aligned} \phi^n &= \left\{ \vec{\Phi}^\phi(\vec{x}) \right\} \cdot \left\{ \vec{U}_\phi^n \right\} \\ \varphi &= \left\{ \vec{\Phi}^\phi(\vec{x}) \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{U}_\phi \right\} \\ \text{com} & \\ \left\{ \vec{\Phi}^\phi(\vec{x}) \right\}^T &= \{ \Phi_1(\xi, \eta), \Phi_2(\xi, \eta), \dots, \Phi_N(\xi, \eta) \} \\ \left\{ \delta \vec{U}_\phi \right\}^T &= \{ \delta \phi_1 \quad \delta \phi_2 \quad \dots \quad \delta \phi_N \}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

As componentes dos vetores gradiente  $\nabla_{\vec{x}} \phi^n$  e  $\nabla_{\vec{x}} \varphi$  podem ser expressas numa forma compacta como

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{x}} \phi^n &= \left\{ \frac{\partial \phi^n}{\partial \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi^n}} \right\} = \sum_{I=1}^N \left\{ \frac{\partial \Phi_I(\vec{x}(\xi, \eta))}{\partial \Phi_I(\vec{x}(\xi, \eta)) \frac{\partial \vec{x}}{\partial y}} \right\} \phi_I^n \\ \nabla_{\vec{x}} \phi^n &= [\mathbf{B}^\phi] \left\{ \vec{U}_\phi^n \right\} \\ \text{com} & \\ [\mathbf{B}^\phi] &= \left[ \left[ B_i^\phi \right] \mid i = 1, \dots, N \right] \\ \nabla_{\vec{x}} \varphi &= \left\{ \frac{\partial \varphi^n}{\partial \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi^n}} \right\} = [\mathbf{B}^\phi] \left\{ \delta \vec{U}_\phi \right\}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

em que

$$\left[ B_i^\phi \right] = \begin{bmatrix} \Phi_{i,x} \\ \Phi_{i,y} \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

ou seja

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}^\phi] &= \left[ [B_1^\phi] \mid [B_2^\phi] \mid [B_3^\phi] \right] \\ [\mathbf{B}^\phi] &= \left[ \begin{bmatrix} \Phi_{1,x} \\ \Phi_{1,y} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \Phi_{2,x} \\ \Phi_{2,y} \end{bmatrix} \mid \dots \begin{bmatrix} \Phi_{N,x} \\ \Phi_{N,y} \end{bmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

#### 4.2.2.1 Discretização da equação incremental de Hamilton-Jacobi

A discretização do problema incremental na Eq.(4.14), permite identificar os seguintes termos:

$$\begin{aligned} (1) &= \int_D \phi^{n+1} \phi \, d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \phi^{n+1} \phi \, d\Omega \\ (2) &= \int_D \phi^n \phi \, d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \phi^n \phi \, d\Omega \\ (3) &= \int_D v_N^n \|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\| \phi \, d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} v_N^n \|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\| \phi \, d\Omega \\ (4) &= \int_D \delta_a \phi^{n+1} \langle \vec{V}^n, \nabla_{\vec{x}} \phi \rangle d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \delta_a \phi^{n+1} \langle \vec{V}^n, \nabla_{\vec{x}} \phi \rangle d\Omega \\ (5) &= \int_D \delta_a \phi^n \langle \vec{V}^n, \nabla_{\vec{x}} \phi \rangle d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \delta_a \phi^n \langle \vec{V}^n, \nabla_{\vec{x}} \phi \rangle d\Omega \\ (6) &= \int_D \delta_a v_N^n \|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\| \langle \vec{V}^n, \nabla_{\vec{x}} \phi \rangle d\Omega \\ (6) &= \sum_e \int_{\Omega_e} \delta_a v_N^n \|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\| \langle \vec{V}^n, \nabla_{\vec{x}} \phi \rangle d\Omega. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Agora, uma vez que a aproximação dos campos  $\phi^{n+1}$ ,  $\phi^n$  e  $\phi$  são dadas por

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} &= \vec{\Phi}^\phi \cdot \vec{U}_\phi^{n+1} \\ \phi^n &= \vec{\Phi}^\phi \cdot \vec{U}_\phi^n \\ \phi &= \vec{\Phi}^\phi \cdot \delta \vec{U}_\phi \\ \nabla_{\vec{x}} \phi &= [\mathbf{B}^\phi] \delta \vec{U}_\phi \\ \nabla_{\vec{x}} \phi^n &= [\mathbf{B}^\phi] \vec{U}_\phi^n, \end{aligned} \quad (4.23)$$

pode-se determinar as seguintes contribuições em cada célula de integração:

- Termo

$$\begin{aligned} (1) &= \int_{\Omega_e} \phi^{n+1} \phi \, d\Omega \\ (1) &= [\mathbf{M}_e^\phi] \vec{U}_\phi^{n+1} \cdot \delta \vec{U}_\phi. \end{aligned}$$

- Termo

$$\begin{aligned} (2) &= \int_{\Omega_e} \phi^n \phi \, d\Omega \\ (2) &= [\mathbf{M}_e^\phi] \vec{U}_\phi^n \cdot \delta \vec{U}_\phi = \vec{F}_e^M \cdot \delta \vec{U}_\phi. \end{aligned} \quad (4.24)$$

- Termo

$$\begin{aligned} (3) &= \int_{\Omega_e} v_N^n \|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\| \varphi \, d\Omega \\ (3) &= \vec{F}_e^N \cdot \delta \vec{U}_\phi. \end{aligned} \quad (4.25)$$

- Termo

$$\begin{aligned} (4) &= \int_{\Omega_e} \delta_a \phi^{n+1} \left\langle \vec{V}^n, \nabla_{\vec{x}} \varphi \right\rangle d\Omega \\ (4) &= [\mathbf{K}_e^V] \left\{ \vec{U}_\phi^{n+1} \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{U}_\phi \right\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

- Termo

$$\begin{aligned} (5) &= \int_{\Omega_e} \delta_a \phi^n \left\langle \vec{V}^n, \nabla_{\vec{x}} \varphi \right\rangle d\Omega \\ (5) &= [\mathbf{K}_e^V] \left\{ \vec{U}_\phi^n \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{U}_\phi \right\} \\ (5) &= \vec{F}_e^V \cdot \delta \vec{U}_\phi. \end{aligned} \quad (4.27)$$

- Termo

$$\begin{aligned} (6) &= \int_{\Omega_e} \delta_a v_N^n \|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\| \left\langle \vec{V}^n, \nabla_{\vec{x}} \varphi \right\rangle d\Omega \\ (6) &= \vec{F}_e^{\Delta} \cdot \delta \vec{U}_\phi. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Consequentemente, tem-se:

$$\begin{aligned} \Sigma_e \left\{ [\mathbf{M}_e^\phi] \vec{U}_\phi^{n+1} \cdot \delta \vec{U}_\phi \right\} &+ \Sigma_e \left\{ [\mathbf{K}_e^V] \left\{ \vec{U}_\phi^{n+1} \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{U}_\phi \right\} \right\} \\ &= \Sigma_e \left\{ \vec{F}_e^M \cdot \delta \vec{U}_\phi \right\} + \Sigma_e \Delta \tau \left\{ \vec{F}_e^N \cdot \delta \vec{U}_\phi \right\} \\ &+ \Sigma_e \left\{ \vec{F}_e^V \cdot \delta \vec{U}_\phi \right\} + \Sigma_e \Delta \tau \left\{ \vec{F}_e^{\Delta} \cdot \delta \vec{U}_\phi \right\}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

#### 4.2.2.2 Montagem do problema linear global

Uma vez que  $\vec{U}_\phi^{n+1}$  e  $\vec{U}_\phi^n$  são os vetores contendo todos os parâmetros nodais associados à aproximação dos mínimos quadrados moveis das funções *level set* em  $\tau_{n+1}$  e  $\tau_n$  respectivamente, denota-se:

$$\begin{aligned} \vec{F}_e^N &= \bigwedge_e \left\{ \vec{F}_e^N \right\} \\ \vec{F}_e^V &= \bigwedge_e \left\{ \vec{F}_e^V \right\} \\ \vec{F}_e^M &= \bigwedge_e \left\{ \vec{F}_e^M \right\} \\ \vec{F}_e^{\Delta} &= \bigwedge_e \left\{ \vec{F}_e^{\Delta} \right\} \\ [\mathbf{M}^\phi] &= \bigwedge_e [\mathbf{M}_e^\phi] \\ [\mathbf{K}^\phi] &= \bigwedge_e [\mathbf{K}_e^V], \end{aligned} \quad (4.30)$$

o que acarreta em

$$\begin{aligned} & [[\mathbf{M}^\phi] + [\mathbf{K}^\phi]] \vec{U}_\phi^{n+1} = \vec{R} \\ & \text{sendo} \\ & \vec{R} = \vec{F}^M + \vec{F}^V + \triangle \tau \left\{ \vec{F}^N + \vec{F}^\triangle \right\}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Como resultado

$$\begin{aligned} & [[\mathbf{M}^\phi] + [\mathbf{K}^\phi]] \vec{U}_\phi^{n+1} = [[\mathbf{M}^\phi] + [\mathbf{K}^\phi]] \vec{U}_\phi^n + \triangle \tau \left\{ \vec{F}^N + \vec{F}^\triangle \right\} \\ & \text{ou seja} \\ & \vec{U}_\phi^{n+1} = \vec{U}_\phi^n + \triangle \tau [[\mathbf{M}^\phi] + [\mathbf{K}^\phi]]^{-1} \left\{ \vec{F}^N + \vec{F}^\triangle \right\}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Definindo o vetor unitário  $\vec{D}$  como

$$\vec{D} = \frac{[[\mathbf{M}^\phi] + [\mathbf{K}^\phi]]^{-1} \left\{ \vec{F}^N + \vec{F}^\triangle \right\}}{\left\| [[\mathbf{M}^\phi] + [\mathbf{K}^\phi]]^{-1} \left\{ \vec{F}^N + \vec{F}^\triangle \right\} \right\|} \quad (4.33)$$

tem-se a equação incremental

$$\begin{aligned} & \vec{U}_\phi^{n+1} = \vec{U}_\phi^n + \triangle \tau_{opt}^* \vec{D} \\ & \text{sendo} \\ & \vec{D} = [[\mathbf{M}^\phi] + [\mathbf{K}^\phi]]^{-1} \left\{ \vec{F}^N + \vec{F}^\triangle \right\} \\ & \triangle \tau_{opt}^* = \arg \min_{\triangle \tau \geq 0} \left\{ J \left( \vec{U}_\phi^n + \triangle \tau \vec{D} \right) \right\} \\ & \text{em que } J \left( \vec{U}_\phi \right) \text{ define a função objetivo.} \end{aligned} \quad (4.34)$$

### 4.3 Equação de reinicialização

O objetivo aqui é de apresentar o procedimento usado na formulação do problema de reinicialização. A equação de reinicialização, modificada com a inclusão de um termo de difusão  $\varepsilon$ , é dada por

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi(\vec{x}, \bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}} + \vec{w}(\vec{x}, \bar{\tau}) \cdot \nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \bar{\tau}) \\ & - \text{div} [\varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \bar{\tau})] = \text{sign}(\vec{x}, \bar{\tau}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

sendo

$$\begin{aligned}\vec{w}(\vec{x}, \bar{\tau}) &= \text{sign}(\vec{x}, \bar{\tau}) \frac{\nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \bar{\tau})}{\|\nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \bar{\tau})\|} \\ \text{sign}(\vec{x}, \bar{\tau}) &= \frac{\psi(\vec{x}, 0)}{\sqrt{\psi(\vec{x}, 0)^2 + \alpha_a}},\end{aligned}\quad (4.36)$$

sujeita à condição inicial

$$\psi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \tau_n), \text{ em at } (\vec{x}, \tau) \in \partial D \times [0, \infty). \quad (4.37)$$

Antes de aplicar o processo de discretização de Galerkin, realiza-se uma discretização no domínio do tempo através da aplicação de um esquema de diferenças finitas, dado por

$$\begin{aligned}\frac{\psi(\vec{x}, \bar{\tau}_{k+1}) - \psi(\vec{x}, \bar{\tau}_k)}{\Delta \bar{\tau}} + \vec{w}(\vec{x}, \bar{\tau}_k) \cdot \nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \bar{\tau}_k) \\ - \text{div}[\varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \bar{\tau}_{k+1})] = \text{sign}(\vec{x}, \bar{\tau}_k).\end{aligned}\quad (4.38)$$

Multiplica-se a Eq. (4.38) por  $\Delta \bar{\tau}$  e deriva-se o seguinte problema incremental: Dado  $\psi(\vec{x}, \bar{\tau}_k)$ , determinar  $\psi(\vec{x}, \bar{\tau}_{k+1})$  tal que

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x}, \bar{\tau}_{k+1}) - \psi(\vec{x}, \bar{\tau}_k) + \Delta \bar{\tau} \vec{w}(\vec{x}, \bar{\tau}_k) \cdot \nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \bar{\tau}_k) \\ - \Delta \bar{\tau} \text{div}[\varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \bar{\tau}_{k+1})] = \Delta \bar{\tau} \text{sign}(\vec{x}, \bar{\tau}_k),\end{aligned}\quad (4.39)$$

sujeito à condição de contorno

$$\psi(\vec{x}, \bar{\tau}_{k+1}) = 0 \text{ em } \vec{x} \in \partial D. \quad (4.40)$$

Logo, seja  $\bar{r}(\vec{x})$  o resíduo da equação de reinicialização, ou seja

$$\begin{aligned}\bar{r}(\vec{x}) = \psi(\vec{x}, \bar{\tau}_{k+1}) - \Delta \bar{\tau} \text{div}[\varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \bar{\tau}_{k+1})] - \psi(\vec{x}, \bar{\tau}_k) \\ - \Delta \bar{\tau} \text{sign}(\vec{x}, \bar{\tau}_k) [1 - \|\nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \bar{\tau}_k)\|].\end{aligned}\quad (4.41)$$

A formulação fraca pode ser escrita como

$$\int_D \bar{r}(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) d\Omega = 0, \quad \forall \varphi. \quad (4.42)$$

Portanto, denotando-se

$$\begin{aligned}\bar{r}^n &= \bar{r}(\vec{x}, \tau_n) \\ S^k &= \text{sign}(\vec{x}, \bar{\tau}_k) \\ \psi^{k+1} &= \psi(\vec{x}, \bar{\tau}_{k+1}) \\ \psi^k &= \psi(\vec{x}, \bar{\tau}_k).\end{aligned}\quad (4.43)$$

determina-se o problema incremental o qual é formulado como: Dado  $\psi^k$ , determinar  $\psi^{k+1}$  tal que

$$\begin{aligned} \tilde{r}^n &= \psi^{k+1} - \triangle \bar{\tau} \operatorname{div} [\varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1}] - \psi^k \\ &\quad - \triangle \bar{\tau} S^k [1 - \|\nabla_{\vec{x}} \psi^k\|] = 0 \\ &\text{sujeito à condição de fronteira} \\ \psi^{k+1}(\vec{x}) &= 0 \text{ em } \vec{x} \in \partial D \\ &\text{sendo} \\ S^k &= \frac{\psi(\vec{x}, 0)}{\sqrt{\psi(\vec{x}, 0)^2 + \alpha_a}} \text{ com } \psi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \tau_n). \end{aligned} \quad (4.44)$$

#### 4.3.1 Derivação da forma fraca da equação incremental

A fim de obter a forma fraca da equação incremental, mediante a aplicação do método de Galerkin livre de elementos, procede-se como se segue: Seja

$$\int_D \tilde{r}^n \varphi \, d\Omega = 0, \forall \varphi. \quad (4.45)$$

Porém,

$$\begin{aligned} \int_D \tilde{r}^n \varphi \, d\Omega &= \int_D \psi^{k+1} \varphi \, d\Omega - \int_D \psi^k \varphi \, d\Omega - \triangle \bar{\tau} \int_D S^k [1 - \|\nabla_{\vec{x}} \psi^k\|] \varphi \, d\Omega \\ &\quad - \triangle \bar{\tau} \int_D \operatorname{div} [\varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1}] \varphi \, d\Omega. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Como resultado, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_D \psi^{k+1} \varphi \, d\Omega + \triangle \bar{\tau} \int_D \varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \, d\Omega \\ = \int_D \psi^k \varphi \, d\Omega + \triangle \bar{\tau} \int_D S^k [1 - \|\nabla_{\vec{x}} \psi^k\|] \varphi \, d\Omega \quad \forall \varphi. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Efetuada-se uma discretização do domínio em células de integração,  $\Omega_e$ , obtém-se as seguintes contribuições:

$$\begin{aligned} (1) &= \int_D \psi^{k+1} \varphi \, d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \psi^{k+1} \varphi \, d\Omega \\ (2) &= \int_D \psi^k \varphi \, d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \psi^k \varphi \, d\Omega \\ (3) &= \int_D \varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \, d\Omega \\ (3) &= \sum_e \int_{\Omega_e} \varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \, d\Omega \\ (4) &= \int_D S^k [1 - \|\nabla_{\vec{x}} \psi^k\|] \varphi \, d\Omega \\ (4) &= \sum_e \int_{\Omega_e} S^k [1 - \|\nabla_{\vec{x}} \psi^k\|] \varphi \, d\Omega. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Neste ponto, supõe-se a mesma aproximação para  $\psi^{k+1}$ ,  $\psi^k$  e  $\phi$  como usado para  $\phi^{n+1}$ , ou seja

$$\begin{aligned}\psi^{k+1} &= \vec{\Phi}^\phi \cdot \vec{p}^{k+1} \\ \psi^k &= \vec{\Phi}^\phi \cdot \vec{p}^k \\ \phi &= \vec{\Phi}^\phi \cdot \delta \vec{p} \\ \nabla_{\vec{x}} \phi &= [\mathbf{B}_\phi] \delta \vec{p} \\ \nabla_{\vec{x}} \psi^k &= [\mathbf{B}_\phi] \vec{p}^k \\ \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1} &= [\mathbf{B}_\phi] \vec{p}^{k+1}.\end{aligned}\tag{4.49}$$

o que nos permite identificar as seguintes contribuições, da formulação discretizada da equação de reinicialização, em cada célula de integração:

- Termo

$$(1) = [\mathbf{M}_e^\phi] \vec{p}^{k+1} \cdot \delta \vec{p};\tag{4.50}$$

- Termo

$$(2) = \vec{F}_e^M \cdot \delta \vec{p} = [\mathbf{M}_e^\phi] \vec{p}^k \cdot \delta \vec{p};\tag{4.51}$$

- Termo

$$(3) = [\mathbf{K}_e^\psi] \vec{p}^{k+1} \cdot \delta \vec{p};\tag{4.52}$$

- Termo

$$(4) = \left\{ \vec{F}_e^N \right\} \cdot \{ \delta \vec{p} \}.\tag{4.53}$$

Consequentemente, tem-se

$$\begin{aligned}& \sum_e \left\{ [\mathbf{M}_e^\phi] \vec{p}^{k+1} \cdot \delta \vec{p} \right\} + \sum_e \left\{ \triangle \bar{\tau} [\mathbf{K}_e^\psi] \vec{p}^{k+1} \cdot \delta \vec{p} \right\} \\ &= \sum_e \left\{ [\mathbf{M}_e^\phi] \vec{p}^k \cdot \delta \vec{p} \right\} \\ &+ \triangle \bar{\tau} \sum_e \left\{ \left( \vec{F}_e^N \right) \cdot \delta \vec{p} \right\}.\end{aligned}\tag{4.54}$$

#### 4.3.1.1 Montagem do problema global

Uma vez que  $\vec{p}^{k+1}$  seja o vetor de todos os parâmetros nodais da função *level set* reinicializada em  $\bar{\tau}_{k+1}$ , denota-se

$$\begin{aligned}\vec{F}^N &= \underset{e}{\lambda} \left\{ \vec{F}_e^N \right\} \\ \vec{F}^M &= \underset{e}{\lambda} \left\{ \vec{F}_e^M \right\} \\ \vec{F}^\delta &= \underset{e}{\lambda} \left\{ \vec{F}_e^\delta \right\} \\ [\mathbf{K}^\psi] &= \underset{e}{\wedge} [\mathbf{K}_e^\psi] \\ [\mathbf{M}^\phi] &= \underset{e}{\wedge} [\mathbf{M}_e^\phi].\end{aligned}\tag{4.55}$$

O problema discreto pode ser formulado como: Dado  $\vec{p}^k$ , determinar  $\vec{p}^{k+1}$  solução de:

$$\begin{aligned}[\mathbf{M}^\phi] \vec{p}^{k+1} \cdot \delta \vec{p} + \triangle \bar{\tau} [\mathbf{K}^\psi] \vec{p}^{k+1} \cdot \delta \vec{p} &= \vec{F}^M \cdot \delta \vec{p} + \triangle \bar{\tau} \vec{F}^N \cdot \delta \vec{p} \\ \text{para cada } \delta \vec{p} \in R^N \\ \text{ou seja} \\ [[\mathbf{M}^\phi] + \triangle \bar{\tau} [\mathbf{K}^\psi]] \{ \vec{p}^{k+1} \} &= \vec{F}^M + \triangle \bar{\tau} \vec{F}^N.\end{aligned}\tag{4.56}$$

### 4.4 Discretização da equação de estado

#### 4.4.1 Formulação do problema de estado

O problema de estado da placa de Mindlin pode ser expresso como:

$$\begin{aligned}\text{Determinar } (\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta) &\in \mathbf{W} \times \mathbf{H} \text{ tal que} \\ \int_A [\mathbf{D}] \vec{\kappa} \left( \vec{u}_o, \vec{\theta} \right) \cdot \vec{\kappa} \left( \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta} \right) dA &- \int_A \sum_{l=1}^n \{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \} \vec{g} \cdot \delta \vec{u}_o dA \\ - \int_{\partial_{AN}} \left\{ \vec{N} \cdot \delta \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} \right\} ds &- \int_{AN} q_o \vec{n} \cdot \delta \vec{u}_o dA + \int_{\partial_{AD}} \left\{ \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \delta \vec{u}_o + \delta \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{u}_o \right\} ds \\ + \int_{\partial_{AD}} \left\{ \vec{\lambda}_\theta \cdot \delta \vec{\theta} + \delta \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{\theta} \right\} ds &= 0, \quad \forall \left( \delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}, \delta \vec{\lambda}_{u_o}, \delta \vec{\lambda}_\theta \right) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H}.\end{aligned}\tag{4.57}$$

Na Eq. (4.57),  $[\mathbf{D}]$  é definido no Apêndice A ou B.

Com a introdução da função *level set*, a formulação do problema da



placa de Mindlin pode ser expressa como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Determinar } (\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H} \text{ tal que} \\
 & \int_D [\mathbf{D}^*(s)] \vec{\kappa}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) \cdot \vec{\kappa}(\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}) h(s) dA - \int_D \sum_{l=1}^n \{\rho^l (h^{l+1} - h^l)\} \vec{g} \cdot \delta \vec{u}_o h(s) dA \\
 & - \int_{\partial A_N} \left\{ \vec{N} \cdot \delta \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} \right\} ds - \int_D q_o \vec{n} \cdot \delta \vec{u}_o h(s) dA \\
 & + \int_{\partial A_D} \left\{ \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \delta \vec{u}_o + \delta \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{u}_o \right\} ds \\
 & + \int_{\partial A_D} \left\{ \vec{\lambda}_\theta \cdot \delta \vec{\theta} + \delta \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{\theta} \right\} ds = 0, \quad \forall (\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}, \delta \vec{\lambda}_{u_o}, \delta \vec{\lambda}_\theta) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H}
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

sendo os subespaços  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{H}$  dados por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W} &= \{ (\vec{v}, \vec{\alpha}) \mid v_i \in H^1(D) \text{ e } \alpha_i \in H^1(D) \} \\
 \mathbf{H} &= \left\{ \left( \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta \right) \mid \vec{\lambda}_{u_o} \in L^2(\partial A_D) \text{ e } \vec{\lambda}_\theta \in L^2(\partial A_D) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

e o tensor elástico de quarta ordem  $\mathbf{D}^*(s)$  como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}^*(s) &= \rho(s) \mathbf{D}_o, \text{ sendo } \mathbf{D}_o \text{ é uma matriz constante} \\
 \rho(s) &= \rho_s h(s) + \rho_i (1 - h(s)) \\
 \rho_s &= 1 \text{ e } \rho_i = 10^{-3} \\
 h(s) &= \begin{cases} 1, & \text{se } s \geq 0 \\ 0, & \text{se } s < 0 \end{cases}.
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Note que, por simplicidade, considerou-se fixo com relação ao processo de otimização, os contornos  $\partial A_D$  e  $\partial A_N$ . Devido à abordagem pelo método da função *level set*, as funções  $(\vec{u}_o, \vec{\theta})$  e  $(\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta})$  foram estendidas para todo o domínio  $D$ , com  $A \subset D$ .

#### 4.5 Discretização do problema pelo método de Galerkin livre de elementos

Considere o problema da Placa de Mindlin formulado como: Dado  $\varepsilon > 0$ , encontrar  $(\vec{u}_o, \vec{\theta}, \vec{\lambda}_{u_o}, \vec{\lambda}_\theta) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H}$  tal que:

$$\begin{aligned} & \int_D [\mathbf{D}_\varepsilon^*(s)] \vec{\kappa}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) \cdot \vec{\kappa}(\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}) h_\varepsilon(s) dA - \int_D \sum_{l=1}^n \{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \} \vec{g} \cdot \delta \vec{u}_o h_\varepsilon(s) dA \\ & - \int_{\partial A_N} \left\{ \vec{N} \cdot \delta \vec{u}_o - \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} \right\} ds - \int_D q_o \vec{n} \cdot \delta \vec{u}_o h_\varepsilon(s) dA \\ & + \int_{\partial A_D} \left\{ \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \delta \vec{u}_o + \delta \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{u}_o \right\} ds \\ & + \int_{\partial A_D} \left\{ \vec{\lambda}_\theta \cdot \delta \vec{\theta} + \delta \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{\theta} \right\} ds = 0, \forall (\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}, \delta \vec{\lambda}_{u_o}, \delta \vec{\lambda}_\theta) \in \mathbf{W} \times \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (4.61)$$

em que

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}_\varepsilon^*(s)] &= \rho_\varepsilon(s) \mathbf{D}_o, \text{ sendo } \mathbf{D}_o \text{ é uma matriz constante} \\ \rho_\varepsilon(s) &= \rho_s h_\varepsilon(s) + \rho_i (1 - h_\varepsilon(s)) \\ &\text{em que } h_\varepsilon(s) \text{ é a função passo regularizada.} \end{aligned} \quad (4.62)$$

##### 4.5.1 Discretização espacial

A fim de obter a forma fraca discreta associada à formulação do problema da placa, os campos  $(\vec{u}_o, \vec{\theta})$  e suas variações  $(\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta})$  são aproximados, utilizando uma abordagem por mínimos quadrados móveis, como:

$$\begin{aligned} u_o(\vec{x}) &= \sum_{I=1}^n \Phi_I(\vec{x}) u_I \\ v_o(\vec{x}) &= \sum_{I=1}^n \Phi_I(\vec{x}) v_I \\ w_o(\vec{x}) &= \sum_{I=1}^n \Phi_I(\vec{x}) w_I \\ \theta_y(\vec{x}) &= \sum_{I=1}^n \frac{\partial \Phi_I}{\partial x}(\vec{x}) \theta_{y_I} \\ -\theta_x(\vec{x}) &= \sum_{I=1}^n \frac{\partial \Phi_I}{\partial y}(\vec{x}) \theta_{x_I}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

e

$$\begin{aligned}
 \delta u_o(\vec{x}) &= \sum_{I=1}^n \Phi_I(\vec{x}) \delta u_I \\
 \delta v_o(\vec{x}) &= \sum_{I=1}^n \Phi_I(\vec{x}) \delta v_I \\
 \delta w_o(\vec{x}) &= \sum_{I=1}^n \Phi_I(\vec{x}) \delta w_I \\
 \delta \theta_y(\vec{x}) &= \sum_{I=1}^n \frac{\partial \Phi_I}{\partial x}(\vec{x}) \delta \theta_{y_I} \\
 -\delta \theta_x(\vec{x}) &= \sum_{I=1}^n \frac{\partial \Phi_I}{\partial y}(\vec{x}) \delta \theta_{x_I};
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

sendo

$$\Phi_I(\vec{x}) = \left\langle \vec{p}(\vec{x}), [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} \vec{B}_I(\vec{x}) \right\rangle, \tag{4.65}$$

com

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A}(\vec{x})] &= \sum_{I=1}^n \varphi(\vec{x} - \vec{x}_I) [\vec{p}(\vec{x}_I) \otimes \vec{p}(\vec{x}_I)] \\
 \vec{p}(\vec{x}) &= \{p_1(\vec{x}), p_2(\vec{x}), \dots, p_m(\vec{x})\} \\
 \vec{B}_I(\vec{x}) &= \varphi(\vec{x} - \vec{x}_I) \vec{p}(\vec{x}_I).
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

Note que, no caso 2D em que  $\vec{x} = \{x, y\} \in \mathbb{R}^2$ , as funções base mais utilizadas para  $\vec{p}(\vec{x})$  na literatura são:

(i) - Base linear em 2D dada por:

$$\vec{p}(\vec{x})^T = \{1, x, y\}, m = 3; \tag{4.67}$$

(ii) - Base quadrática em 2D dada por:

$$\vec{p}(\vec{x}) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}, m = 6.$$

A partir da aproximação acima o vetor de deslocamento  $\vec{u}_o$ , com componentes  $(u_o, v_o, w_o)$ , pode ser expresso como:

$$\begin{aligned}
 \vec{u}_o(\vec{x}) &= \left\{ \begin{array}{c} u_o(\vec{x}) \\ v_o(\vec{x}) \\ w_o(\vec{x}) \end{array} \right\} = [\Phi^g(\vec{x})] \left\{ \vec{U}^g \right\} \\
 [\Phi^g(\vec{x})] &= \left[ \begin{array}{c|c|c} \Phi_1(\vec{x}) & \Phi_2(\vec{x}) & \dots & \Phi_n(\vec{x}) \end{array} \right],
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

sendo

$$\left\{ \vec{U}^g \right\}^T = \left\{ \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & w_1 & \theta_{y_1} & -\theta_{x_1} & \cdots \\ & u_n & v_n & w_n & \theta_{y_n} & -\theta_{x_n} \end{array} \right\} \quad (4.69)$$

os graus de liberdade associados aos campos de deslocamento e de rotação da placa. Por analogia, tem-se:

$$\delta \vec{u}_o(\vec{x}) = \left\{ \begin{array}{c} \delta u_o(\vec{x}) \\ \delta v_o(\vec{x}) \\ \delta w_o(\vec{x}) \end{array} \right\} = [\bar{\Phi}^g(\vec{x})] \left\{ \delta \vec{U}^g \right\} \quad (4.70)$$

$$[\bar{\Phi}^g(\vec{x})] = [ [\Phi_1(\vec{x})] \mid [\Phi_2(\vec{x})] \mid \cdots \mid [\Phi_n(\vec{x})] ] \left\{ \delta \vec{U}^g \right\},$$

com

$$[\Phi_a(\vec{x})] = \begin{bmatrix} \Phi_a(\vec{x}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_a(\vec{x}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_a(\vec{x}) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

e

$$\left\{ \delta \vec{U}^g \right\}^T = \left\{ \begin{array}{ccccc} \delta u_1 & \delta v_1 & \delta w_1 & \delta \theta_{y_1} & -\delta \theta_{x_1} & \cdots \\ & \delta u_n & \delta v_n & \delta w_n & \delta \theta_{y_n} & -\delta \theta_{x_n} \end{array} \right\}. \quad (4.72)$$

Além disso, a partir da aproximação acima, o vetor de rotação  $\vec{\theta} = (\theta_y, -\theta_x)$  pode ser expresso como:

$$\vec{\theta} = \left\{ \begin{array}{c} \theta_y(\vec{x}) \\ -\theta_x(\vec{x}) \end{array} \right\} = [\bar{\Psi}^g(\vec{x})] \left\{ \vec{U}^g \right\} \quad (4.73)$$

$$\vec{\theta} = [ [\Psi_1(\vec{x})] \mid [\Psi_2(\vec{x})] \mid \cdots \mid [\Psi_n(\vec{x})] ] \left\{ \vec{U}^g \right\},$$

em que

$$[\Psi_a(\vec{x})] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_a(\vec{x})}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_a(\vec{x})}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (4.74)$$

Por analogia, tem-se

$$\delta \vec{\theta}(\vec{x}) = \left\{ \begin{array}{c} \delta \theta_y(\vec{x}) \\ -\delta \theta_x(\vec{x}) \end{array} \right\} = [\bar{\Psi}^g(\vec{x})] \left\{ \delta \vec{U}^g \right\} \quad (4.75)$$

$$\delta \vec{\theta}(\vec{x}) = [ [\Psi_1(\vec{x})] \mid [\Psi_2(\vec{x})] \mid \cdots \mid [\Psi_n(\vec{x})] ] \left\{ \delta \vec{U}^g \right\}.$$

Por outro lado, as deformações generalizadas  $\vec{\kappa}(\vec{u}_o, \vec{\theta})$  podem ser expressas como

$$\begin{aligned}\vec{\kappa} &= [\vec{\mathbf{B}}^g(\vec{x})] \left\{ \vec{U}^g \right\} \\ \vec{\kappa} &= [ [\mathbf{B}_1(\vec{x})] \mid [\mathbf{B}_2(\vec{x})] \mid \cdots \mid [\mathbf{B}_n(\vec{x})] ] \left\{ \vec{U}^g \right\},\end{aligned}\quad (4.76)$$

sendo

$$[\mathbf{B}_a(\vec{x})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_a(\vec{x})}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_a(\vec{x})}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Phi_a(\vec{x})}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_a(\vec{x})}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 \Phi_a(\vec{x})}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 \Phi_a(\vec{x})}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 \Phi_a(\vec{x})}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \Phi_a(\vec{x})}{\partial x \partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_a(\vec{x})}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_a(\vec{x})}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_a(\vec{x})}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \Phi_a(\vec{x})}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (4.77)$$

Adicionalmente, por analogia, tem-se

$$\begin{aligned}\delta \vec{\kappa} &= [\vec{\mathbf{B}}^g(\vec{x})] \left\{ \delta \vec{U}^g \right\} \\ \delta \vec{\kappa} &= [ [\mathbf{B}_1(\vec{x})] \mid [\mathbf{B}_2(\vec{x})] \mid \cdots \mid [\mathbf{B}_n(\vec{x})] ] \left\{ \delta \vec{U}^g \right\}.\end{aligned}\quad (4.78)$$

Para descrever completamente as equações discretas relacionadas à formulação do problema da placa, aproximam-se os multiplicadores de Lagrange  $(\vec{\lambda}_{u_o}(\vec{x}), \vec{\lambda}_{\theta}(\vec{x}))$  e suas variações  $(\delta \vec{\lambda}_{u_o}(\vec{x}), \delta \vec{\lambda}_{\theta}(\vec{x}))$  como:

$$\begin{aligned}\vec{\lambda}_{u_o}(\vec{x}) &= \sum_{I=1}^{k_D} [\mathbf{N}_I(\vec{x}(\vec{s}))] \vec{\lambda}_I^{u_o} \\ \vec{\lambda}_{\theta}(\vec{x}) &= \sum_{I=1}^{k_D} [\mathbf{N}_I(\vec{x}(\vec{s}))] \vec{\lambda}_I^{\theta};\end{aligned}\quad (4.79)$$

e

$$\begin{aligned}\delta \vec{\lambda}_{u_o}(\vec{x}) &= \sum_{I=1}^{k_D} [\mathbf{N}_I(\vec{x}(\bar{s}))] \delta \vec{\lambda}_I^{u_o} \\ \delta \vec{\lambda}_\theta(\vec{x}) &= \sum_{I=1}^{k_D} [\mathbf{N}_I(\vec{x}(\bar{s}))] \delta \vec{\lambda}_I^\theta;\end{aligned}\quad (4.80)$$

sendo  $k_D$  o número total de nós no contorno  $\partial A_D$ . No caso 2D, o contorno será uma curva em  $R^2$ . Porém, devido à partição do domínio em células de integração triangulares, o contorno será aproximado por segmentos de reta. Como resultado, tanto  $(\vec{\lambda}_{u_o}(\vec{x}), \vec{\lambda}_\theta(\vec{x}))$  como  $(\delta \vec{\lambda}_{u_o}(\vec{x}), \delta \vec{\lambda}_\theta(\vec{x}))$  serão interpolados linearmente em cada segmento usando funções base clássicas, utilizadas pelo método dos elementos finitos lineares.

A interpolação acima pode também ser expressa como

$$\begin{aligned}\vec{\lambda}_{u_o}(\vec{x}(\bar{s})) &= \begin{Bmatrix} \lambda_{u_o}(\vec{x}(\bar{s})) \\ \lambda_{v_o}(\vec{x}(\bar{s})) \\ \lambda_{w_o}(\vec{x}(\bar{s})) \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^{k_D} [\mathbf{N}_I(\vec{x}(\bar{s}))] \begin{Bmatrix} \lambda_I^{u_o}(\vec{x}(\bar{s})) \\ \lambda_I^{v_o}(\vec{x}(\bar{s})) \\ \lambda_I^{w_o}(\vec{x}(\bar{s})) \end{Bmatrix} \\ \text{sendo} \\ [\mathbf{N}_I(\vec{x}(\bar{s}))] &= \begin{bmatrix} N_I(\vec{x}(\bar{s})) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_I(\vec{x}(\bar{s})) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_I(\vec{x}(\bar{s})) & 0 & 0 \end{bmatrix};\end{aligned}\quad (4.81)$$

e

$$\begin{aligned}\vec{\lambda}_\theta(\vec{x}(\bar{s})) &= \begin{Bmatrix} \lambda_{\theta_y}(\vec{x}(\bar{s})) \\ \lambda_{\theta_x}(\vec{x}(\bar{s})) \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^{k_D} [\mathbf{M}_I(\vec{x}(\bar{s}))] \begin{Bmatrix} \lambda_I^{\theta_y}(\vec{x}(\bar{s})) \\ \lambda_I^{\theta_x}(\vec{x}(\bar{s})) \end{Bmatrix} \\ \text{sendo} \\ [\mathbf{M}_I(\vec{x}(\bar{s}))] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_I(\vec{x}(\bar{s})) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_I(\vec{x}(\bar{s})) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (4.82)$$

Denotando-se

$$\begin{aligned}\{\vec{U}^\lambda\}^T &= \left\{ \lambda_1^{u_o}, \lambda_1^{v_o}, \lambda_1^{w_o}, \lambda_1^{\theta_y}, \lambda_1^{\theta_x} \mid \lambda_2^{u_o}, \lambda_2^{v_o}, \lambda_2^{w_o}, \lambda_2^{\theta_y}, \lambda_2^{\theta_x} \mid \dots \right. \\ &\quad \left. \lambda_{k_D}^{u_o}, \lambda_{k_D}^{v_o}, \lambda_{k_D}^{w_o}, \lambda_{k_D}^{\theta_y}, \lambda_{k_D}^{\theta_x} \right\}\end{aligned}\quad (4.83)$$

como sendo o vetor dos graus de liberdade associados aos multiplicadores de Lagrange, pode-se reescrever as equações acima, numa forma compacta

matricial, como

$$\vec{\lambda}_{u_o}(\vec{x}(\bar{s})) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda_{u_o}(\vec{x}(\bar{s})) \\ \lambda_{v_o}(\vec{x}(\bar{s})) \\ \lambda_{w_o}(\vec{x}(\bar{s})) \end{array} \right\} = [\mathbf{N}^g(\vec{x}(\bar{s}))] \vec{U}^\lambda \quad (4.84)$$

sendo

$$[\mathbf{N}^g(\vec{x}(\bar{s}))] = [ [\mathbf{N}_1(\vec{x})] \mid [\mathbf{N}_2(\vec{x})] \mid \cdots \mid [\mathbf{N}_{k_u}(\vec{x})] ] \left\{ \vec{U}^\lambda \right\};$$

e

$$\vec{\lambda}_\theta(\vec{x}(\bar{s})) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda_{\theta_y}(\vec{x}(\bar{s})) \\ \lambda_{\theta_x}(\vec{x}(\bar{s})) \end{array} \right\} = [\mathbf{M}^g(\vec{x}(\bar{s}))] \vec{U}^\lambda \quad (4.85)$$

sendo

$$[\mathbf{M}^g(\vec{x}(\bar{s}))] = [ [\mathbf{M}_1(\vec{x})] \mid [\mathbf{M}_2(\vec{x})] \mid \cdots \mid [\mathbf{M}_{k_u}(\vec{x})] ] \left\{ \vec{U}^\lambda \right\}.$$

Por analogia, deriva-se também uma expressão compacta para  $(\delta \vec{\lambda}_{u_o}(\vec{x}), \delta \vec{\lambda}_\theta(\vec{x}))$  dado por

$$\delta \vec{\lambda}_{u_o}(\vec{x}(\bar{s})) = \left\{ \begin{array}{c} \delta \lambda_{u_o}(\vec{x}(\bar{s})) \\ \delta \lambda_{v_o}(\vec{x}(\bar{s})) \\ \delta \lambda_{w_o}(\vec{x}(\bar{s})) \end{array} \right\} = [\mathbf{N}^g(\vec{x}(\bar{s}))] \delta \vec{U}^\lambda \quad (4.86)$$

e

$$\delta \vec{\lambda}_\theta(\vec{x}(\bar{s})) = \left\{ \begin{array}{c} \delta \lambda_{\theta_y}(\vec{x}(\bar{s})) \\ \delta \lambda_{\theta_x}(\vec{x}(\bar{s})) \end{array} \right\} = [\mathbf{M}^g(\vec{x}(\bar{s}))] \delta \vec{U}^\lambda.$$

### 4.5.2 Derivação das equações discretas associadas ao modelo da placa de Mindlin

Substituindo-se as Eq. (4.68), (4.73), (4.70), (4.75), (4.76), (4.78), (4.84), (4.85) e (4.86) em cada um dos termos da Eq. (4.61), obtém-se

$$\begin{aligned}
 (a) &= \int_D [\mathbf{D}_\varepsilon^*(s)] \vec{\mathbf{K}}(\vec{u}_o, \vec{\theta}) \cdot \vec{\mathbf{K}}(\delta \vec{u}_o, \delta \vec{\theta}) h_\varepsilon(s) dA \\
 (b) &= \int_D \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \right\} \vec{g} \cdot \delta \vec{u}_o h_\varepsilon(s) dA \\
 (c) &= \int_{\partial A_N} \left\{ \vec{\mathbf{N}} \cdot \delta \vec{u}_o - \vec{\mathbf{M}} \cdot \delta \vec{\theta} \right\} ds \\
 (d) &= \int_D q_o \vec{n} \cdot \delta \vec{u}_o h_\varepsilon(s) dA \\
 (e) &= \int_{\partial A_D} \left\{ \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \delta \vec{u}_o + \vec{\lambda}_\theta \cdot \delta \vec{\theta} \right\} ds \\
 (f) &= \int_{\partial A_D} \left\{ \delta \vec{\lambda}_{u_o} \cdot \vec{u}_o + \delta \vec{\lambda}_\theta \cdot \vec{\theta} \right\} ds \\
 &\text{com } s = \vec{\phi}(\vec{x}, \tau)
 \end{aligned} \tag{4.87}$$

os quais podem ser computados como:

- Termo (a)

$$\begin{aligned}
 (a) &= [\mathbf{K}_{u,u}^g] \left\{ \vec{U}^g \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{U}^g \right\} \\
 &\text{sendo} \\
 [\mathbf{K}_{u,u}^g] &= \int_D [\vec{\mathbf{B}}^g(\vec{x})]^T [\mathbf{D}_\varepsilon^*(s)] [\vec{\mathbf{B}}^g(\vec{x})] h_\varepsilon(s) dA;
 \end{aligned} \tag{4.88}$$

- Termo (b)

$$\begin{aligned}
 (b) &= \left\{ \vec{F}_\rho^g \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{U}^g \right\} \\
 &\text{sendo} \\
 \vec{F}_\rho^g &= \int_D \sum_{l=1}^n \left\{ \rho^l (h^{l+1} - h^l) \right\} [\vec{\Phi}^g(\vec{x})]^T \vec{g} h_\varepsilon(s) dA;
 \end{aligned} \tag{4.89}$$

- Termo (c)

$$\begin{aligned}
 (c) &= \left\{ \vec{F}_{NM}^g \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{U}^g \right\} \\
 &\text{sendo} \\
 \vec{F}_{NM}^g &= \int_{\partial D \cap \partial A_N} \left( [\vec{\Phi}^g(\vec{x})]^T \vec{\mathbf{N}} - [\vec{\Psi}^g(\vec{x})]^T \vec{\mathbf{M}} \right) ds;
 \end{aligned} \tag{4.90}$$



- Termo (d)

$$(d) = \left\{ \vec{F}_q^g \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{U}^g \right\}$$

sendo

$$\vec{F}_q^g = \int_D q_o [\bar{\Phi}^g(\vec{x})]^T \vec{n} h_\varepsilon(s) dA; \quad (4.91)$$

- Termo (e)

$$(e) = \left[ \mathbf{K}_{u,\lambda}^g \right] \left\{ \vec{U}^\lambda \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{U}^g \right\}$$

sendo

$$\left[ \mathbf{K}_{u,\lambda}^g \right] = \int_{D \cap \partial A_D} \left\{ [\bar{\Phi}^g(\vec{x})]^T [\mathbf{N}^g(\vec{x}(\bar{s}))] + [\bar{\Psi}^g(\vec{x})]^T [\mathbf{M}^g(\vec{x}(\bar{s}))] \right\} ds; \quad (4.92)$$

- Termo (f)

$$(f) = \left[ \mathbf{K}_{\lambda,u}^g \right] \left\{ \vec{U}^\lambda \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{U}^g \right\}$$

sendo

$$\left[ \mathbf{K}_{\lambda,u}^g \right] = \int_{D \cap \partial A_D} \left\{ [\mathbf{N}^g(\vec{x}(\bar{s}))]^T [\bar{\Phi}^g(\vec{x})] + [\mathbf{M}^g(\vec{x}(\bar{s}))]^T [\bar{\Psi}^g(\vec{x})] \right\} ds. \quad (4.93)$$

Substituindo-se as Eq. (4.88), (4.89), (4.90), (4.91), (4.92) e (4.93) na Eq. (4.61), tem-se:

$$\left[ \begin{array}{c} \left[ \mathbf{K}_{u,u}^g \right] \left[ \mathbf{K}_{u,\lambda}^g \right] \\ \left[ \mathbf{K}_{\lambda,u}^g \right] [0] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \vec{U}^g \\ \vec{U}^\lambda \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \delta \vec{U}^g \\ \delta \vec{U}^\lambda \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_\rho^g + \vec{F}_{NM}^g + \vec{F}_q^g \\ 0 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \delta \vec{U}^g \\ \delta \vec{U}^\lambda \end{array} \right\}$$

para  $\forall (\delta \vec{U}^g, \delta \vec{U}^\lambda)$ ,

(4.94)

o que resulta no seguinte sistema de equações lineares, dado por

$$\left[ \begin{array}{c} \left[ \mathbf{K}_{u,u}^g \right] \left[ \mathbf{K}_{u,\lambda}^g \right] \\ \left[ \mathbf{K}_{\lambda,u}^g \right] [0] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \vec{U}^g \\ \vec{U}^\lambda \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}^g \\ 0 \end{array} \right\}$$

sendo

$$\vec{F}^g = \vec{F}_\rho^g + \vec{F}_{NM}^g + \vec{F}_q^g. \quad (4.95)$$

#### 4.6 Algoritmo do problema de otimização

O algoritmo de otimização descreve-se pelo seguinte procedimento:

- Inicialização:

Leitura de dados:

parâmetros geométricos,  
parâmetros materiais,  
nós, elementos, restrições, etc.

Fixa-se:

erro, tolerância, iterações,  
número de iterações máximas.  
multiplicadores de Lagrange.  
norma do gradiente da função *level set* admissível (GLSA).

- Otimização:

Determina-se o valor inicial do vetor das variáveis de projeto.

Determina-se o volume inicial e o perímetro inicial.

Determina-se o vetor dos deslocamentos nodais.

Determina-se a função objetivo.

Enquanto (erro > tolerância) faça:

Determina-se:

direção de descida

limite superior do parâmetro de passo

vetor da velocidade normal de cada nó da malha.

Resolve-se o problema de otimização sem restrições.

Determina-se o passo ótimo na direção de descida.

Atualiza-se o vetor das variáveis de projeto.

Calcula-se o novo erro.

Atualiza-se a iteração.

Calcula-se:

valor do gradiente da função *level set* (MGLSA).

Se (MGLSA > GLSA) faça:

Efetua-se a reinicialização.

Determina-se o vetor dos deslocamentos nodais.

Determina-se a função objetivo.

Fim de Enquanto

- Efetua-se o pós-processamento.

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados alguns resultados relativos à formulação discutida nos capítulos anteriores para o problema proposto. Um software em Fortran orientado a objetos foi desenvolvido e utilizado na determinação da solução numérica dos problemas empregados na validação do método de otimização proposto. Algumas considerações iniciais são feitas inicialmente as quais foram utilizadas na elaboração dos exemplos numéricos. O pré-processamento e pós-processamento foi realizado com o uso de um software comercial.

### 5.1 Considerações gerais

A validação do algoritmo proposto foi dividida em duas partes que são:

- (i) Validação do algoritmo utilizado na solução da equação de estado relativa ao problema da placa de Mindlin. A validação do algoritmo é feita pela comparação das soluções numéricas obtidas com soluções analíticas encontradas na literatura. Nesta etapa são avaliadas a escolha do fator de abrangência e o tipo de função peso adotada.
- (ii) Validação do algoritmo de otimização. A validação do algoritmo é feita pela comparação das formas e topologias ótimas obtidas com as formas e topologias ótimas encontradas na literatura, para o mesmo problema tipo.

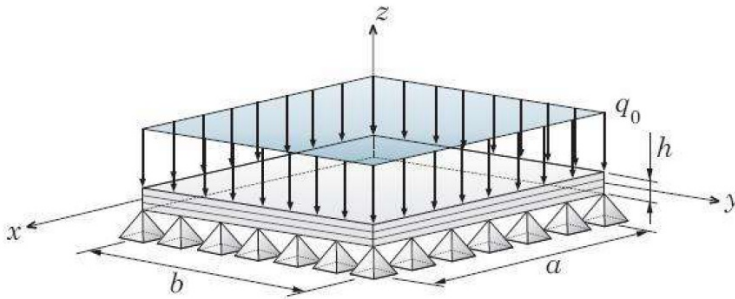
### 5.2 Solução da equação de estado

As hipóteses adotadas em cada exemplo para obtenção dos resultados são as seguintes:

1. Estado plano de tensões.
2. Ausência de forças de corpo.
3. Partição do domínio em células triangulares, do tipo Tri3, e base implícita quadrática, utilizada na aproximação de mínimos quadrados móveis.

### 5.2.1 Problema 1

Trata-se do problema de uma placa quadrada isotrópica simplesmente apoiada (SS-1) submetida a um carregamento uniforme, como ilustrado a Figura 5.1.



**Figura 5.1:** Placa quadrada simplesmente apoiada (TELES, 2007).

Os parâmetros geométricos e materiais deste modelo são:

- Dimensões da placa:  $a = 1\text{ m}$ ,  $b = 1\text{ m}$ , a espessura tem os valores  $h = 10\text{ mm}$ ,  $h = 50\text{ mm}$  e  $h = 100\text{ mm}$ ;
- Propriedades do material (aço):  $E = 210\text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$  e  $k = \frac{5}{6}$ ;
- Condições de contorno essenciais: placa simplesmente apoiada (SS-1), utilizando 1/4 do domínio devido a condições de simetria;
- Carregamento: pressão uniformemente distribuída na superfície da placa, de intensidade  $q_0 = -10\text{ N/m}^2$ , na direção  $z$ ;
- Malha estruturada de 1250 células de integração triangulares contendo 676 nós (vértices);

Para avaliar o efeito da função peso em relação ao fator de abrangência ( $s$ ) foram apresentados os resultados nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3. A solução analítica para este problema é encontrada em Timoshenko, Woinowsky-Krieger e Woinowsky (1959).

**Tabela 5.1:** Resultados do problema 1 com  $s = 1.5$ 

$a/h$	Função peso	$w_{max}$ ( m )	$(M_x)_{max}$ ( Nm/m )	$(M_y)_{max}$ ( Nm/m )
10	Polinomial par (I)	2.18920E-09	0.476	0.476
	Exponencial (VI)	2.17980E-09	3.815	11.537
	Spline cúbica (III)	2.23300E-09	1.268	0.480
	Spline quártica (IV)	2.23670E-09	0.483	0.483
	Spline de sétima ordem (V)	2.22590E-09	0.481	0.481
	Polinomial (II)	2.19180E-09	0.476	0.476
	Valor teorico Timoshenko	2.16354E-09	0.479	0.479
20	Polinomial par (I)	1.66666E-08	0.465	0.465
	Exponencial (VI)	1.65940E-08	113.900	92.035
	Spline cúbica (III)	1.69170E-08	0.744	2.005
	Spline quártica (IV)	1.69380E-08	0.470	0.470
	Spline de sétima ordem (V)	1.68660E-08	1.588	2.970
	Polinomial (II)	1.66760E-08	0.465	0.465
	Valor teorico Timoshenko	1.73083E-08	0.479	0.479
100	Polinomial par (I)	2.01740E-06	0.455	0.455
	Exponencial (VI)	2.00400E-06	0.443	0.443
	Spline cúbica (III)	2.03350E-06	0.465	0.465
	Spline quártica (IV)	2.04010E-06	0.465	0.465
	Spline de sétima ordem (V)	2.03550E-06	0.464	0.464
	Polinomial (II)	2.00900E-06	0.457	0.457
	Valor teorico Timoshenko	2.16354E-06	0.479	0.479

A partir da análise dos resultados apresentados na Tabela 5.1, pode-se concluir que as funções peso com um fator de abrangência  $s = 1.5$ , não oferecerem resultados confiáveis.

A partir da análise dos resultados apresentados na Tabela 5.2, pode-se concluir que as funções peso com um fator de abrangência  $s = 1.8$ , oferecerem resultados confiáveis; a função com melhor resultado é o polinômio par/ímpar.

A partir da análise dos resultados apresentados na Tabela 5.3, pode-se concluir que as funções peso com um fator de abrangência  $s = 2.0$ , oferecerem resultados confiáveis; a função peso com melhor resultado é a polinomial de classe  $C^2 (R^2)$  do tipo (II), ver apêndice D.

**Tabela 5.2:** Resultados do problema 1 com  $s = 1.8$ 

$a/h$	Função peso	$w_{max}$ ( $m$ )	$(M_x)_{max}$ ( $Nm/m$ )	$(M_y)_{max}$ ( $Nm/m$ )
10	Polinomial par (I)	2.19640E-09	0.504	0.504
	Exponencial (VI)	2.19710E-09	0.475	0.475
	Spline cúbica (III)	2.31410E-09	0.733	0.733
	Spline quártica (IV)	2.33210E-09	0.803	0.803
	Spline de sétima ordem (V)	2.28340E-09	0.660	0.660
	Polinomial (II)	2.19270E-09	0.486	0.486
	Valor teorico Timoshenko	2.16354E-09	0.479	0.479
20	Polinomial par (I)	1.67400E-08	0.494	0.494
	Exponencial (VI)	1.67480E-08	0.465	0.465
	Spline cúbica (III)	1.74730E-08	0.673	0.673
	Spline quártica (IV)	1.75850E-08	0.734	0.734
	Spline de sétima ordem (V)	1.72570E-08	0.602	0.602
	Polinomial (II)	1.67040E-08	0.477	0.477
	Valor teorico Timoshenko	1.73083E-08	0.479	0.479
100	Polinomial par (I)	2.02940E-06	0.486	0.486
	Exponencial (VI)	2.03310E-06	0.458	0.458
	Spline cúbica (III)	2.10160E-06	0.696	0.696
	Spline quártica (IV)	2.11280E-06	0.742	0.742
	Spline de sétima ordem (V)	2.07760E-06	0.588	0.588
	Polinomial (II)	2.02340E-06	0.474	0.474
	Valor teorico Timoshenko	2.16354E-06	0.479	0.479

### 5.3 Análise de otimização

As hipóteses adotadas em cada exemplo para obtenção dos resultados numéricos são as seguintes:

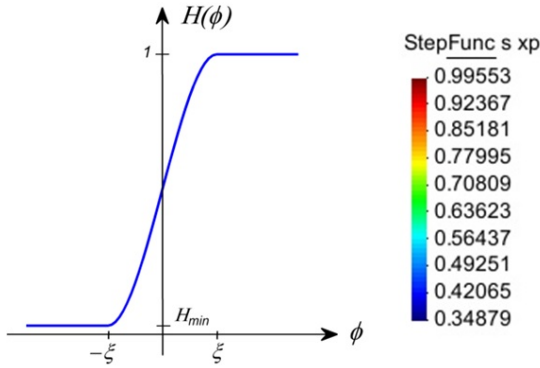
1. Considera-se que a tensão normal  $\sigma_{zz} \simeq 0$  e que as lâminas estão sujeitas a um estado plano de tensão e que a seção está sujeita a tensões cisalhantes transversais (hipótese básica do modelo de placa de Mindlin);
2. Aplica-se as hipóteses cinemáticas propostas por Mindlin;
3. Ausência de forças de corpo;
4. Utiliza-se células de integração triangulares, do tipo Tri3;
5. Os gráficos obtidos da análise de otimização são representados mediante a função *step* regularizada ilustrada na Figura 5.2. Os valores são repre-

**Tabela 5.3:** Resultados do problema 1 com  $s = 2.0$ 

$a/h$	Função peso	$w_{max}$ ( m )	$(M_x)_{max}$ ( Nm/m )	$(M_y)_{max}$ ( Nm/m )
10	Polinomial par (I)	2.13780E-09	0.468	0.468
	Exponencial (VI)	2.21330E-09	0.500	0.500
	Spline cúbica (III)	2.41840E-09	0.962	0.962
	Spline quártica (IV)	2.47410E-09	1.016	1.016
	Spline de sétima ordem (V)	2.40990E-09	0.877	0.877
	Polinomial (II)	2.22090E-09	0.486	0.486
	Valor teorico Timoshenko	2.16354E-09	0.479	0.479
20	Polinomial par (I)	1.62820E-08	0.458	0.458
	Exponencial (VI)	1.68560E-08	0.488	0.488
	Spline cúbica (III)	1.82280E-08	0.925	0.925
	Spline quártica (IV)	1.86190E-08	0.993	0.964
	Spline de sétima ordem (V)	1.81530E-08	0.844	0.844
	Polinomial (II)	1.69060E-08	0.475	0.475
	Valor teorico Timoshenko	1.73083E-08	0.479	0.479
100	Polinomial par (I)	1.96850E-06	0.448	0.448
	Exponencial (VI)	2.04360E-06	0.476	0.476
	Spline cúbica (III)	2.18690E-06	0.962	0.962
	Spline quártica (IV)	2.23090E-06	0.995	0.995
	Spline de sétima ordem (V)	2.17660E-06	0.886	0.886
	Polinomial (II)	2.04090E-06	0.462	0.462
	Valor teorico Timoshenko	2.16354E-06	0.479	0.479

sentados mediante cores; o intervalo de valores de 0.5 a 1 indicam a presença de material; o intervalo de valores de 0.0 a 0.5 indicam a presença de vazios. O contorno do corpo é dado pelas curvas de nível de valor 0.5 da função *step* regularizada;

6. O presente método requer a inclusão inicial de vazios circulares, já que o método não é capaz de nuclear vazios, apresentando assim restrições quando à topologia ótima obtida. O contorno do domínio inicial é obtido pelas curvas de nível zero da função *level set* ou, de forma equivalente, pelas curvas de nível de valor 0.5 da função *step* regularizada.



**Figura 5.2:** Função step regularizada (JUNIOR, 2011) e faixa de cores para cada valor adotado.

### 5.3.1 Problema 2

O problema a ser resolvido consiste em uma placa retangular engastada em ambos lados como ilustrada na Figura 5.3, submetida a um estado plano de tensões. A placa é submetida a uma carga concentrada aplicada no ponto médio da aresta inferior. Os principais parâmetros geométricos e materiais são:

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$P = 1 \times 10^6 \text{ N}$$

$$a = 1 \text{ m}$$

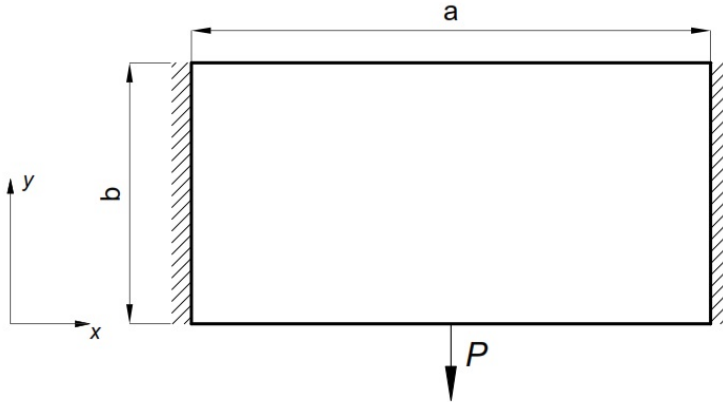
$$b = 0.5 \text{ m}$$

$$h = 1 \text{ m}.$$

Para o problema, utiliza uma malha estruturada com 200 células de integração triangulares contendo 441 nós. O problema foi modelado para diferentes configurações iniciais como pode ser visto na Figura 5.4. Para a obtenção destes resultados foram utilizados: fator de abrangência da cobertura  $s = 1.8$ , função peso dada pela função peso (II), ver apêndice D, base polinomial quadrática, 7 pontos de integração no contorno e 13 pontos de



integração no interior da célula de integração triangular.



**Figura 5.3:** Placa retangular engastada em ambos lados - Problema 2.

A configuração final, obtida na iteração 30, pode ser vista na Figura 5.5. O gráfico mostrando a evolução da função objetivo em relação ao número de iterações é mostrado na Figura 5.6. A Figura 5.6 mostra que a solução final não depende do número de vazios circulares utilizadas no domínio inicial.

### 5.3.2 Problema 3

Considere o problema ilustrado na Figura 5.7 o qual consiste em uma placa engastada em suas bordas, submetida a uma carga central normal à superfície. Os principais parâmetros geométricos e materiais são:

$$E = 210 \text{ GPa}$$

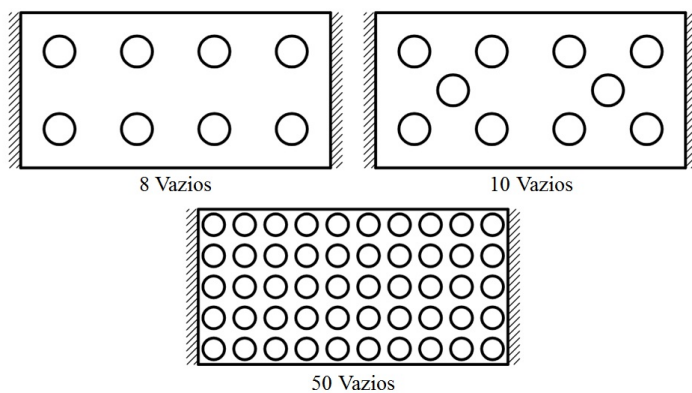
$$\nu = 0.3$$

$$P = 4000 \text{ N}$$

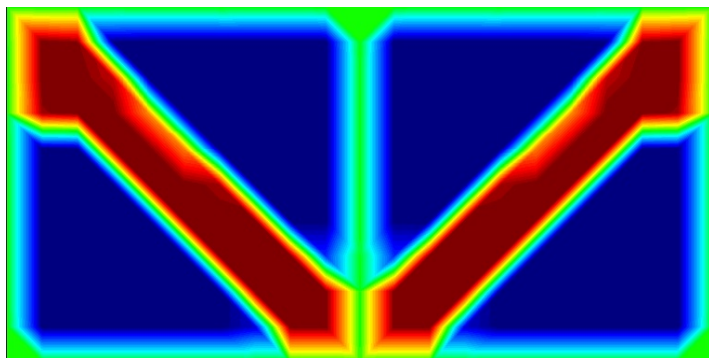
$$a = 0.5 \text{ m}$$

$$h = 0.01 \text{ m}.$$

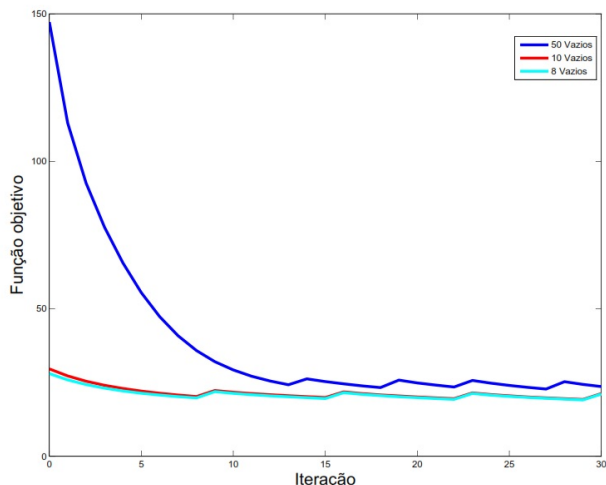
Para a solução do problema, foi utilizada uma malha estruturada com 800 células de integração triangulares contendo 441 nós (vértices) e pode ser



**Figura 5.4:** Diferentes opções para a configuração inicial para o problema 2.



**Figura 5.5:** Configuração final para o problema 2.



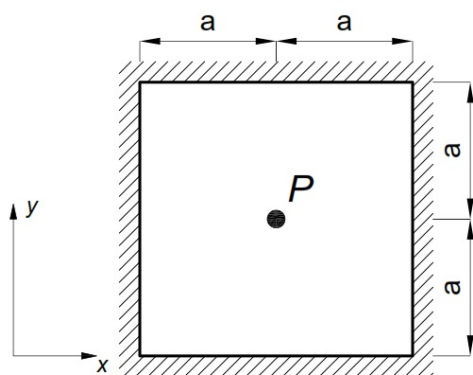
**Figura 5.6:** Convergência da função objetivo para o problema 2.

vista na Figura 5.8. A configuração inicial mostrada na Figura 5.9, tem 25 vazios circulares de raio 0.005  $m$ .

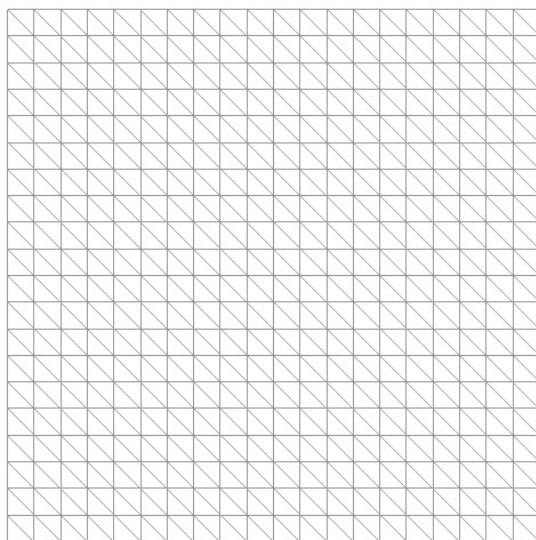
O histórico do processo iterativo pode ser visto na Figura 5.10, na qual são ilustradas as topologias obtidas nas iterações 5 e 10; e na Figura 5.11 são ilustradas as topologias obtidas nas iterações 15 e 20. Para a obtenção destes resultados foram utilizados: fator de abrangência da cobertura  $s = 1.8$ , função peso polinomial do tipo (II), base implícita quadrática, 7 pontos de integração no contorno e 13 pontos de integração no interior da célula de integração triangular.

A configuração final, obtida na iteração 25, pode ser vista na Figura 5.12; a Figura 5.13 mostra a configuração final segundo Junior (2003) e Bendsoe e Sigmund (2003). Devido ao fato da malha não ser adequadamente refinada, o que acarretaria no aumento do subespaço de aproximação, já que a cada vértice da malha corresponde uma nova função base global, a topologia e forma ótima não foram adequadamente representadas.

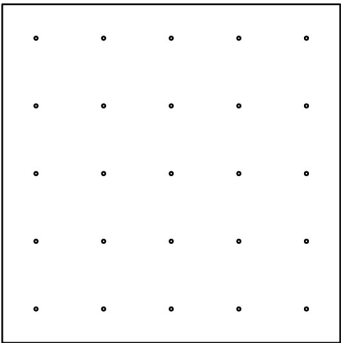
O gráfico que mostra a evolução da função objetivo em relação ao número de iterações é mostrado na Figura 5.14. Observa-se que, no processo de iteração, a função objetivo tem subidas como resultado do processo de



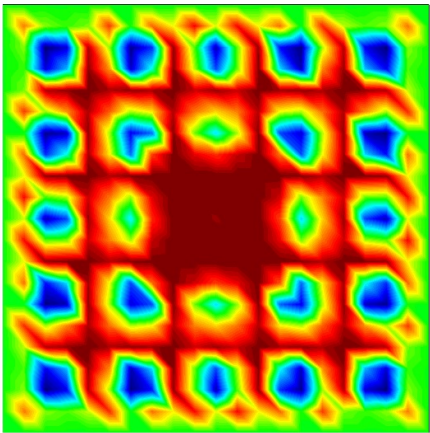
**Figura 5.7:** Placa engastada no contorno sobre carga transversal - Problema 3 (JUNIOR, 2003).



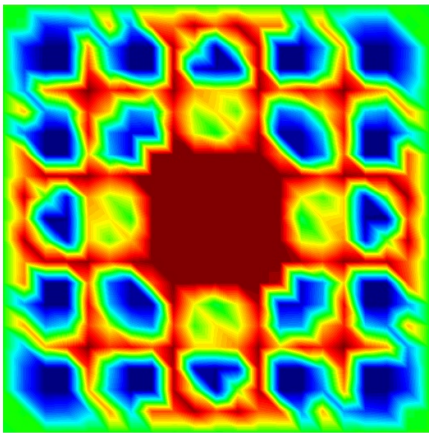
**Figura 5.8:** Malha estruturada com 800 células de integração triangulares.



**Figura 5.9:** Configuração inicial do problema.

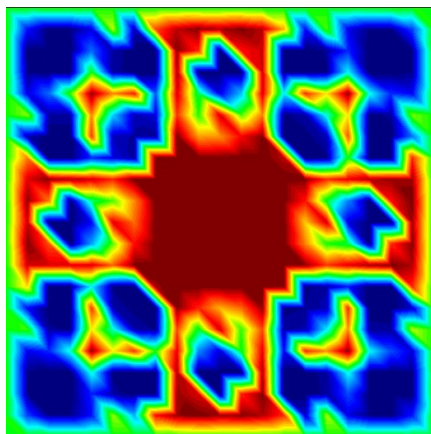


Iteração 05

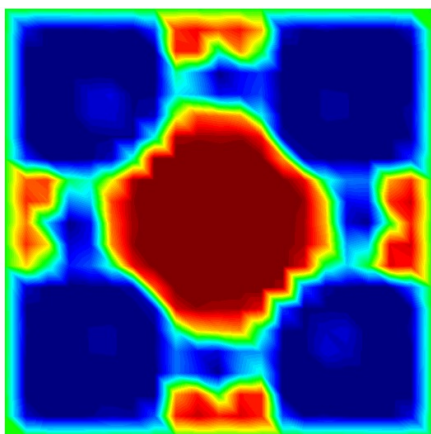


Iteração 10

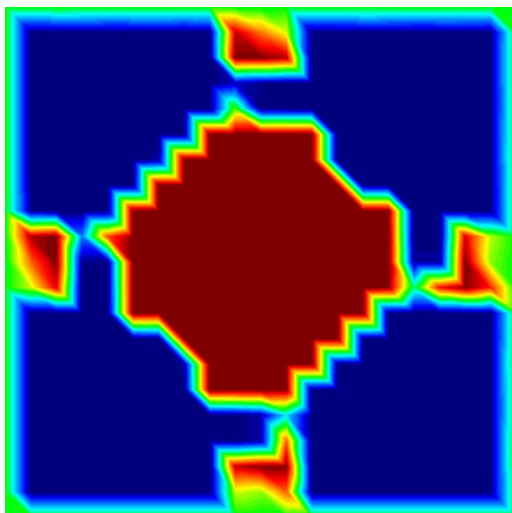
**Figura 5.10:** Resultados intermediários do problema 3.

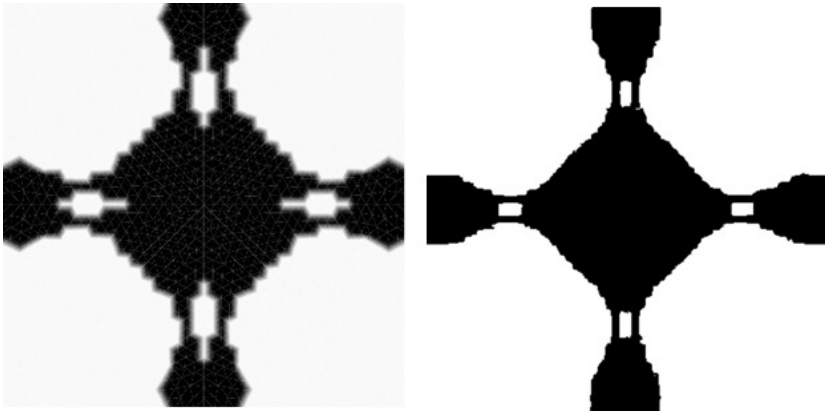


Iteração 15



Iteração 20

**Figura 5.11:** Resultados intermediários do problema 3.**Figura 5.12:** Configuração final do problema 3.



**Figura 5.13:** a) Configuração final do problema 3 segundo Junior (2003). b) Configuração final do problema 3 segundo Bendsoe e Sigmund (2003).

reinicialização.

### 5.3.3 Problema 4

O problema a ser resolvido consiste em uma placa quadrada engastada em torno nos vértices como ilustrado na Figura 5.15. A placa é submetida a uma carga transversal concentrada aplicada no centro. Os principais parâmetros geométricos e materiais são:

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.3$$

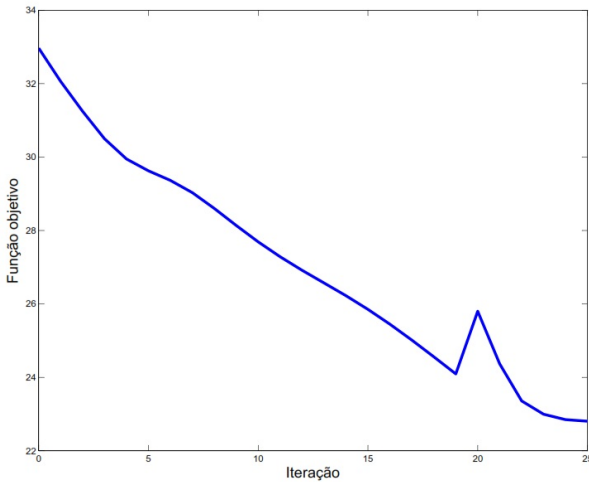
$$P = 4000 \text{ N}$$

$$a = 0.45 \text{ m}$$

$$b = 0.05 \text{ m}$$

$$h = 0.01 \text{ m}$$

Para a solução do problema foi utilizada uma malha estruturada com 800 células de integração triangulares contendo 441 nós (vértices) e pode ser vista na Figura 5.8. A configuração inicial é mostrada na Figura 5.9, ou seja similar ao problema anterior, tem-se 25 vazios circulares de raio  $0.005 \text{ m}$ . O



**Figura 5.14:** Convergência da função objetivo do problema 3.

histórico do processo iterativo pode ser visto na Figura 5.16, a qual ilustra as topologias obtidas nas iterações 4 e 16; Figura 5.17, são ilustradas as topologias obtidas nas iterações 28 e 40. Para obtenção destes resultados foram utilizados: fator de abrangência da cobertura  $s = 1.8$ , função peso polinômial do tipo (II), base quadrática, 7 pontos de integração no contorno e 13 pontos de integração no interior da célula de integração triangular.

A configuração final, obtida na iteração 50, pode ser vista na Figura 5.18 e comparada segundo Junior (2003). Neste caso, devido à orientação favorável da malha, pode-se obter uma topologia ótima com um contorno bem definido.

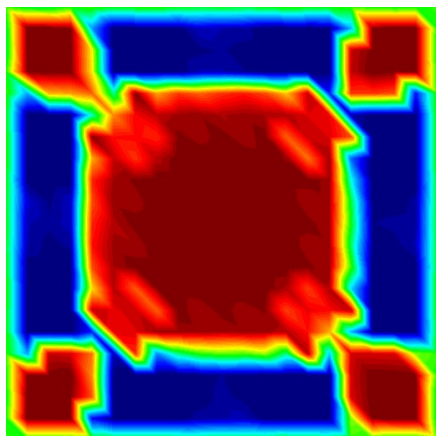
O gráfico que mostra a evolução da função objetivo em relação ao número de iterações é mostrado na Figura 5.19. Na Figura 5.19 observa-se, no gráfico de evolução da função objetivo, a presença de subidas no valor da função objetivo como resultado do processo de reinicialização.

### 5.3.4 Problema 5

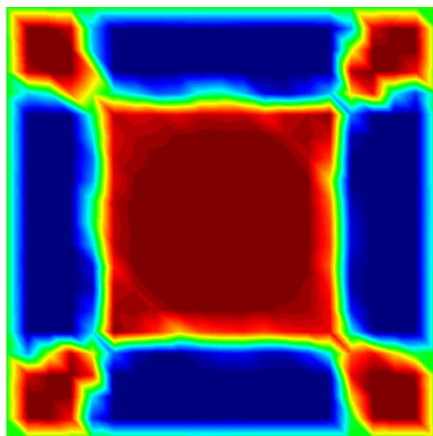
Considere o problema ilustrado na Figura 5.20 que consiste em uma placa engastada na borda esquerda e submetida a duas cargas concentradas



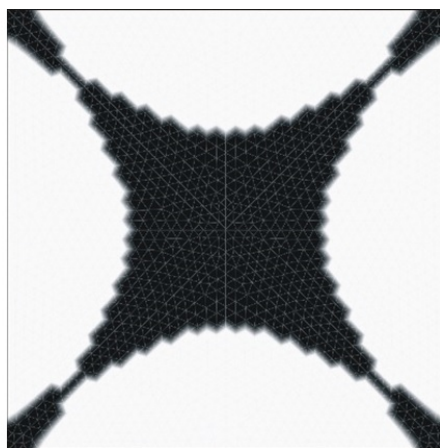
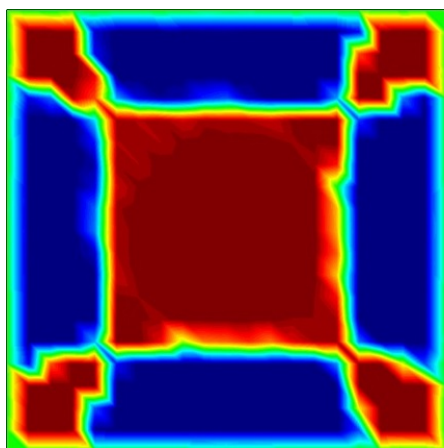


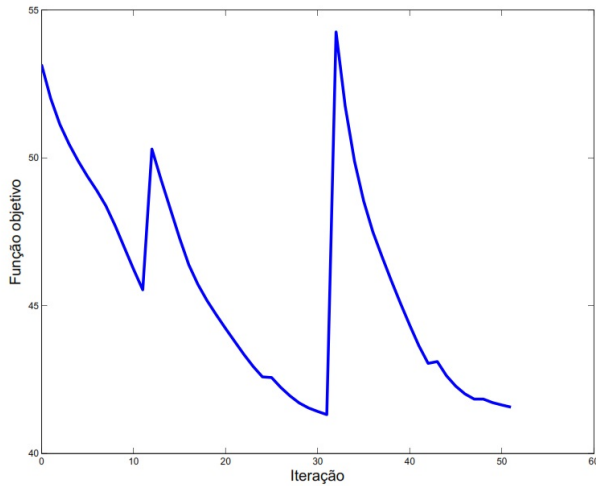


Iteração 28



Iteração 40

**Figura 5.17:** Resultados intermediários do problema 4.**Figura 5.18:** a) Configuração final do problema 4. b) Configuração final do problema 4 segundo Junior (2003).



**Figura 5.19:** Convergência da função objetivo do problema 4.

aplicadas na borda oposta. Os principais parâmetros geométricos e materiais são:

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.3$$

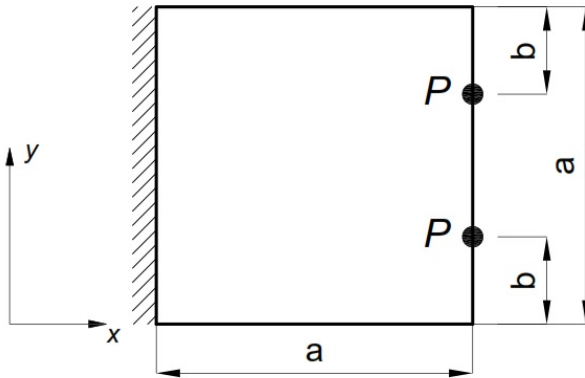
$$P = 500 \text{ N}$$

$$a = 1 \text{ m}$$

$$b = 0.275 \text{ m}$$

$$h = 0.01 \text{ m}$$

Para a solução do problema, foi utilizada uma malha estruturada com 800 células de integração triangulares contendo 441 nós e pode ser vista na Figura 5.8. A configuração inicial é mostrada na Figura 5.9, ou seja similar à do problema anterior, a qual possui 25 vazios circulares de raio  $0.005 \text{ m}$ . O histórico do processo iterativo pode ser visto na Figura 5.21, a qual ilustra as topologias obtidas nas iterações 7 e 17. Na Figura 5.22, são ilustradas as topologias obtidas nas iterações 27 e 37. Para obtenção destes resultados foram utilizados: fator de abrangência da cobertura  $s = 1.8$ , função peso polinômial

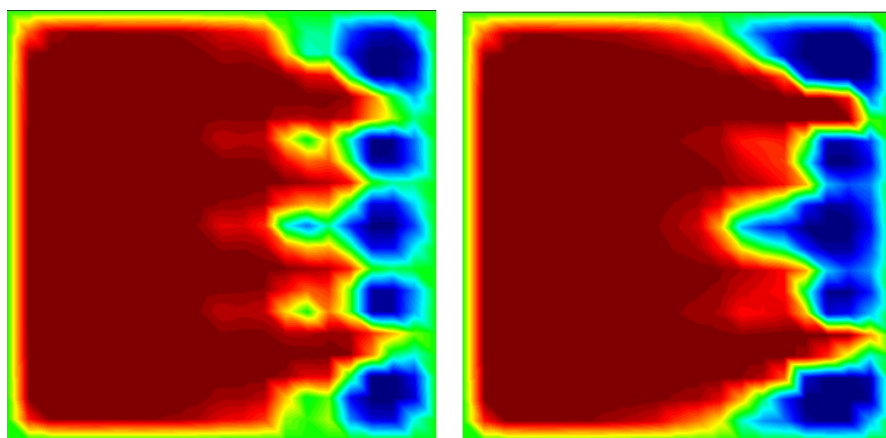


**Figura 5.20:** Placa engastada no lado sobre carga transversal - Problema 5 (JUNIOR, 2003).

do tipo (II), base implícita quadrática, 7 pontos de integração no contorno e 13 pontos de integração no interior da célula de integração triangular.

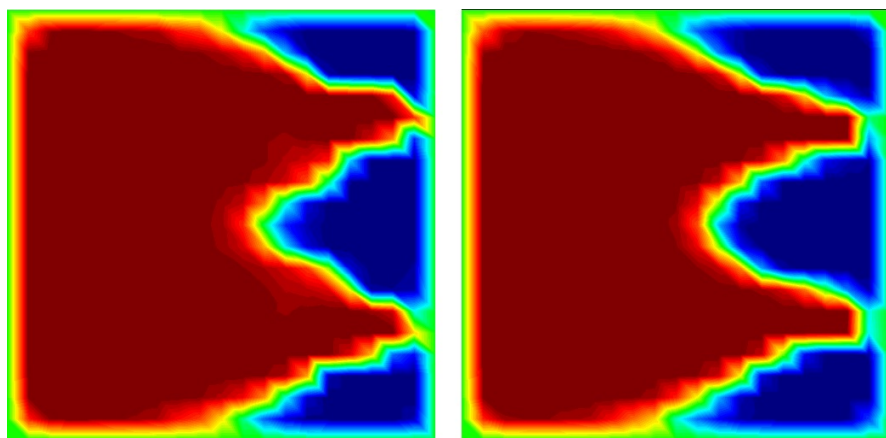
A configuração final, obtida na iteração 59, pode ser vista na Figura 5.23 e comparada segundo Bendsoe e Sigmund (2003). Neste caso pode-se ver também que a utilização de uma malha mais refinada, com o consequente aumento do espaço de aproximação, levaria a uma melhor descrição da topologia ótima, i.e., de uma topologia ótima com um contorno melhor definido.

O gráfico que mostra a evolução da função objetivo em relação ao número de iterações é mostrado na Figura 5.24. Na Figura 5.24 observa-se que no processo de iteração a função objetivo tem subidas como resultado do processo de reinicialização.



Iteração 12

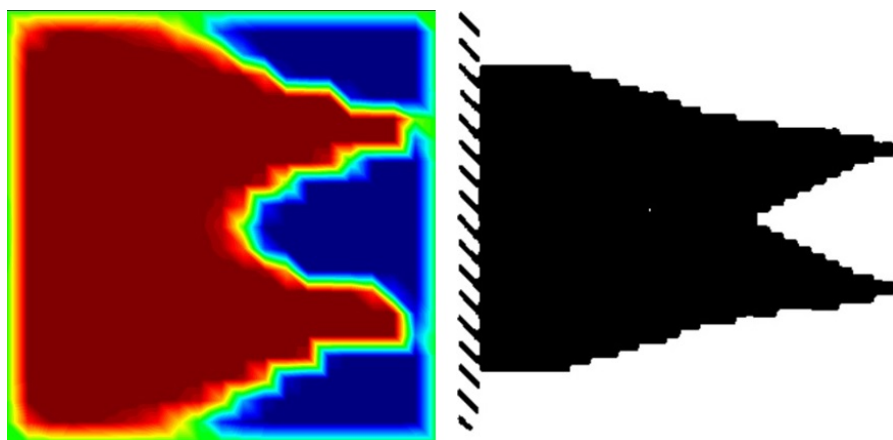
Iteração 24

**Figura 5.21:** Resultados intermediários do problema 5.

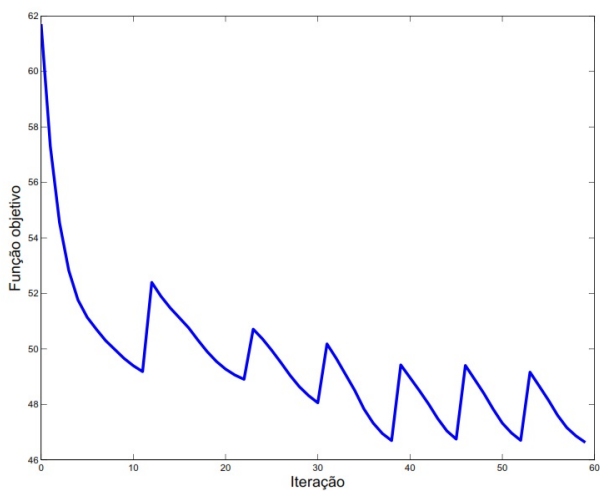
Iteração 36

Iteração 48

**Figura 5.22:** Resultados intermediários do problema 5.



**Figura 5.23:** a) Configuração final do problema 5. b) Configuração final do problema 5 segundo Bendsoe e Sigmund (2003).



**Figura 5.24:** Convergência da função objetivo do problema 5.

## 6 CONCLUSÕES

Esta dissertação apresentou uma abordagem sobre o desenvolvimento teórico e computacional da análise da otimização de forma e topologia para a minimização da flexibilidade em placas planas modelada pela teoria de Mindlin. Uma série de testes foi feita e podem-se destacar as seguintes conclusões obtidas do trabalho desenvolvido:

- A abordagem proposta resultou em uma ferramenta muito promissora para a determinação de leiautes estruturais ótimos de placas planas.
- A função peso polinômial do tipo (II) e o fator de abrangência  $s = 1.8$  apresentaram melhores resultados.
- A presente abordagem mostrou que nos problemas considerados o resultado final da topologia não foi influenciado pelo número de vazios circulares empregados no domínio inicial. Porém, este resultado não pode ser generalizado para casos mais complexos.
- A solução dos problemas 3 e 5 obtidos neste trabalho são comparados aos resultados obtidos em Bendsoe e Sigmund (2003). Os resultados finais possuem topologias semelhantes.
- A solução dos problemas 3 e 4 obtidos neste trabalho são comparados aos resultados obtidos em Junior (2003). Os resultados finais possuem topologias semelhantes. Note que como os espaços de aproximação utilizados são distintos, nesta comparação, o valor da função objetivo ótima não são os mesmos.
- O processo de reinicialização utilizado na regularização da função *level set* mostrou-se fundamental, já que evita a instabilidade do processo de otimização causado pelos erros numéricos advindos do mal condicionamento matemático do problema, ao longo do processo de evolução da função *level set*.

### 6.0.5 Sugestões para trabalhos futuros

Esta linha de pesquisa mostrou-se bastante promissora com relação ao desenvolvimento de algoritmos para a determinação da topologia ótima de placas, utilizando-se o método de *level set*. Este trabalho abordou a questão do método *level set* para otimização de forma e topologia para a minimização

da flexibilidade em placas planas modelada pela teoria de Mindlin. Porém, várias extensões podem ser pesquisadas, dentre elas podemos citar:

- Extensão ao problema de placas laminadas.
- Extensão ao problema de cascas 3D, visando a otimização de reforços em vasos de pressão.
- Trabalho envolvendo placas sujeitas a grandes deslocamentos entre outras possibilidades.



## REFERÊNCIAS

- ALLAIRE, G. et al. Shape optimization by the homogenization method. *Numerische Mathematik*, Springer, v. 76, n. 1, p. 27–68, 1997.
- ALLAIRE, G.; JOUVE, F.; TOADER, A.-M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 194, n. 1, p. 363–393, 2004.
- BARTH, T. J.; SETHIAN, J. A. Numerical schemes for the hamilton–jacobi and level set equations on triangulated domains. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 145, n. 1, p. 1–40, 1998.
- BELO, I. M. *Análise eficiente de compósitos laminados planos utilizando a formulação de elementos finitos corrigida a-priori sem os efeitos do travamento*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Departamento de Ciências Exatas e de Tecnologia, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Fevereiro 2006.
- BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. Element-free galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 37, n. 2, p. 229–256, 1994.
- BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural optimization*, Springer, v. 1, n. 4, p. 193–202, 1989.
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 71, n. 2, p. 197–224, 1988.
- BENDSOE, M. P.; SIGMUND, O. *Topology optimization: theory, methods and applications*. Berlin: Springer, 2003.
- BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/ Petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 32, n. 1, p. 199–259, 1982.
- CHOI, K. K.; KIM, N.-H. *Structural sensitivity analysis and optimization 1: linear systems*. New York: Springer, 2006.

- CODINA, R.; OÑATE, E.; CERVERA, M. The intrinsic time for the streamline upwind/petrov-galerkin formulation using quadratic elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 94, n. 2, p. 239–262, 1992.
- COUTINHO, K. D. *Método de Otimização Topológica em Estruturas Tridimensionais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Outubro 2006.
- DHATT, G.; LEFRANÇOIS, E.; TOUZOT, G. *Finite element method*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.
- DIJK, N. van et al. Level-set methods for structural topology optimization: a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, p. 1–36, 2013.
- ESCHENAUER, H. A.; OLHOFF, N. Topology optimization of continuum structures: a review. *Applied Mechanics Reviews*, AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS, v. 54, n. 4, p. 331–389, 2001.
- FISH, J.; BELYTSCHKO, T. *A first course in finite elements*. Chichester: John Wiley and Sons, 2007.
- FUNG, Y. C. *Foundations of solid mechanics*. New Jersey: Prentice-Hall, 1965.
- GEORGIOS, M. *Structural Optimization and Applications Using Free-Fem++*. Dissertação (Mestrado) — National Technical University of Athens (NTUA), School of Applied Mathematical and Physical Sciences, 2010.
- HABER, R. B.; BENDSØE, M. P. Problem formulation, solution procedures and geometric modeling: Key issues in variable-topology optimization. In: *Proc 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symp on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. [S.l.: s.n.], 1998. v. 1, p. 1864–1837.
- JUNIOR, A. L. *Análise comparativa de métodos de otimização topológica em elasticidade 2D e 3D*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Dezembro 2004.

- JUNIOR, H. E. *Problema de otimização estrutural com restrição de tensão local usando o método level set*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Outubro 2011.
- JUNIOR, J. C. A. C. *Otimização topológica com refinamentos h-adaptativos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Novembro 2003.
- KAW, A. K. *Mechanics of composite materials*. Second edition. Boca Raton: CRC press, 2006.
- LEE, T.; LIN, C.-L. A characteristic galerkin method for discrete boltzmann equation. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 171, n. 1, p. 336–356, 2001.
- LUO, Z. et al. Structural shape and topology optimization using a meshless galerkin level set method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 90, n. 3, p. 369–389, 2012.
- MALVERN, L. E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. New Jersey: Prentice-Hall, 1969.
- MOURAD, H. M.; DOLBOW, J.; GARIKIPATI, K. An assumed-gradient finite element method for the level set equation. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 64, n. 8, p. 1009–1032, 2005.
- OSHER, S.; SETHIAN, J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 79, n. 1, p. 12–49, 1988.
- OSHER, S. J.; SANTOSA, F. Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints: I. frequencies of a two-density inhomogeneous drum. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 171, n. 1, p. 272–288, 2001.
- PENG, D. et al. A pde-based fast local level set method. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 155, n. 2, p. 410–438, 1999.

- RAVINDRAN, A.; REKLAITIS, G. V.; RAGSDELL, K. M. *Engineering optimization: Methods and applications*. Second edition. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006.
- REDDY, J. N. *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. Texas: John Wiley & Sons, 2002.
- REDDY, J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis/JN Reddy*. Second edition. Boca Raton: CRC press, 2004.
- REDDY, J. N. *An introduction to the finite element method*. Third edition. Texas: McGraw-Hill New York, 2006.
- SETHIAN, J. A. *Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*. Second edition. New York: Cambridge university press, 1999.
- SOKOLOWSKI, J.; ZOLESIO, J.-P. *Introduction to shape optimization*. [S.l.]: Springer, 1992.
- SUZUKI, K.; KIKUCHI, N. A homogenization method for shape and topology optimization. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 93, n. 3, p. 291–318, 1991.
- TELES, T. F. de G. *Método de Galerkin livre de elementos aplicado a placas de materiais compostos laminados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Novembro 2007.
- THOMPSON, L. L.; PINSKY, P. M. A galerkin least-squares finite element method for the two-dimensional helmholtz equation. *International Journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 38, n. 3, p. 371–397, 1995.
- TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S.; WOINOWSKY, S. *Theory of plates and shells*. Second edition. New York: McGraw-hill New York, 1959.
- WANG, M. Y.; WANG, X.; GUO, D. A level set method for structural topology optimization. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 192, n. 1, p. 227–246, 2003.

- WASHIZU, K. *Variational methods in elasticity and plasticity*. Second edition. New York: Pergamon press, 1975.
- ZHOU, M.; ROZVANY, G. The coc algorithm, part ii: topological, geometrical and generalized shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 89, n. 1, p. 309–336, 1991.



## APÊNDICE A – COMPOSTOS LAMINADOS

Um composto é um material estrutural que consiste em dois ou mais componentes que são combinados a um nível macroscópico e não são solúveis uns nos outros. O componente que contém os demais componentes é denominado de material de fase de matriz. Os demais componentes são chamados de fase de reforço. Os materiais da fase de reforço podem estar na forma de fibras, partículas ou flocos. O material de fase de matriz é geralmente contínuo. Exemplos de sistemas compostos incluem concreto reforçado com aço e epóxi reforçado com fibras de vidro ou grafite, etc (KAW, 2006).

As estruturas laminadas, fabricadas em materiais compostos, consistem na sobreposição de várias lâminas, que são formadas por fibras unidirecionais envolvidas por uma matriz (resina). Estas fibras podem estar orientadas diferentemente e têm a finalidade de oferecer resistência mecânica necessária à estrutura, enquanto que a matriz garante sua rigidez.

Considerando que o material composto é formado por constituintes distintos, as propriedades equivalentes de cada lâmina são determinadas a partir das propriedades elásticas de seus constituintes. Esse modelo considera o material composto laminar como sendo um material homogêneo, porém anisotrópico. Por causa das diferentes propriedades materiais das diferentes lâminas, o laminado resultante é modelado através da teoria da lâmina equivalente, que considera uma adesão perfeita na interface das lâminas, isto é, considera os deslocamentos e as deformações contínuas através da espessura do laminado.

Na análise de tensões de materiais compostos, divide-se o estudo em duas áreas: a micromecânica e a macromecânica. A micromecânica estuda as interações microscópicas entre os elementos constituintes de uma lâmina. Este estudo é utilizado para determinar as constantes de engenharia do material composto. Outra forma de se obter estas constantes é experimentalmente, através de ensaios de tração. A macromecânica refere-se ao comportamento da lâmina apenas quando propriedades mecânicas aparentes médias são consideradas (TELES, 2007).

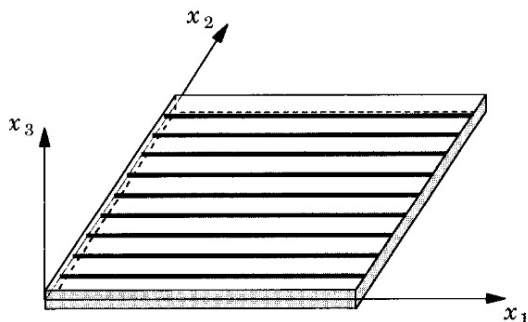
### A.1 Propriedades da lâmina

No estudo da micromecânica, as seguintes hipóteses são feitas:

- A lâmina é macroscopicamente homogênea e ortotrópica;

- A lâmina é elástica linear e livre de qualquer tensão interna ou térmica;
- As fibras são uniformes nas propriedades e diâmetros, são contínuas, paralelas e regularmente espaçadas;
- A matriz é considerada homogênea, isotrópica e de comportamento elástico linear;
- Existe perfeita adesão entre matriz e fibra e não existem vazios.

Para o estudo das propriedades mecânicas de uma lâmina, define-se um sistema de coordenadas ortogonal que coincide com o sistema de eixos de ortotropia da lâmina, onde a direção 1 é a longitudinal das fibras, a direção 2 é transversal às fibras, porém no plano da lâmina, e a direção 3 é transversal em relação as fibras e ortogonal ao plano da lâmina. A figura A.1 mostra este sistema.



**Figura A.1:** Sistema de eixos de ortotropia da lâmina (REDDY, 2004).

Com base neste sistema de eixos, definem-se as propriedades mecânicas elásticas da lâmina. Considerando o estado plano de tensão e a propriedade de isotropia transversa, resulta em propriedades mecânicas na direção 3 iguais às da direção 2. As constantes necessárias para descrever o comportamento de um material ortotrópico geral são:

- $E_i$  : módulo de elasticidade na direção  $i$ ;
- $G_{ij}$  : módulo de cisalhamento no plano  $i - j$ ;



- $\nu_{ij}$  : coeficiente de Poisson referente à deformação na direção  $j$  causada por uma solicitação na direção  $i$ .

A Eq. (A.1) apresenta a relação entre tensão e deformação dada pela matriz de flexibilidade para transversalmente isotrópico.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

satisfazendo as relações

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{12}}{E_1} &= \frac{\nu_{21}}{E_2} \\ \frac{\nu_{13}}{E_1} &= \frac{\nu_{31}}{E_3} \\ \frac{\nu_{23}}{E_2} &= \frac{\nu_{32}}{E_3}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Como resultado, apenas 9 parâmetros materiais são distintos, que são:

$$\{E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{23}, G_{13}, \nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}\} > 0. \quad (\text{A.3})$$

No caso particular do material ser transversalmente isotrópico, o comportamento mecânico da lâmina fica caracterizado apenas por 6 constantes materiais, abaixo identificadas:

- $E_1$  : módulo de elasticidade da fibra (direção 1);
- $E_2 = E_3$  : módulo de elasticidade da matriz (direção 2 e 3);
- $G_1 = G_{13} = G_{12}$  : módulo de cisalhamento nos planos que contêm a fibra (1-2 ou 1-3);
- $G_2 = G_{23}$  : módulo de cisalhamento da matriz;
- $\nu_{12} = \nu_{13}$  : coeficiente de Poisson referente à deformação na direção transversal a fibra (direção 2 ou 3) causada por uma solicitação na direção da fibra (direção 1);

•  $\nu_2 = \nu_{23} = \nu_{32}$  : coeficiente de Poisson da matriz.

A matriz de flexibilidade, Eq. (A.1), pode ser escrita na forma matricial compacta como

$$\vec{\epsilon}^L = [S^L] \vec{\sigma}^L. \quad (\text{A.4})$$

em que o índice  $L$  indica que são valores no sistema de eixos de ortotropia.

Invertendo a matriz de flexibilidade  $[S^L]$ , obtém-se a matriz de rigidez  $[Q^L]$ , ou seja,

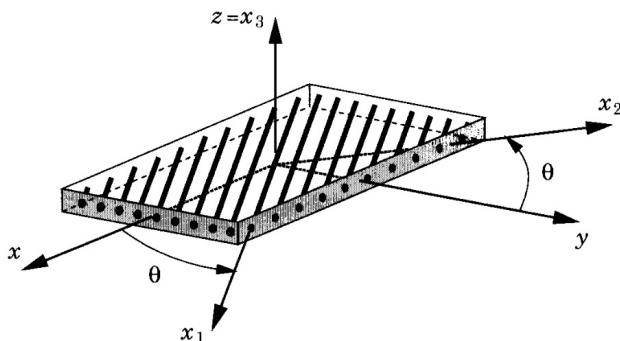
$$[Q^L] = [S^L]^{-1}. \quad (\text{A.5})$$

Logo:

$$\vec{\sigma}^L = [Q^L] \vec{\epsilon}^L. \quad (\text{A.6})$$

## A.2 Comportamento do laminado

Como um laminado é composto por diversas lâminas com orientações diferentes, é necessário adotar um sistema de coordenadas de referência para todas as lâminas, de modo que se possa sobrepor as propriedades particulares de cada lâmina e obter a propriedade equivalente do laminado. A Figura A.2 mostra a rotação do sistema de ortotropia em relação ao sistema de referência. O eixo  $x_3$  do sistema de ortotropia coincide com o eixo  $z$  do sistema de referência.



**Figura A.2:** Sistemas de eixos de ortotropia e referência (REDDY, 2004).

Para determinar o comportamento da lâmina no sistema de referência (tensão, deformação e matriz de rigidez), é necessário rotacionar os valores obtidos no sistema de ortotropia para o sistema de referência. Os dois sistemas de coordenadas cartesianas ortonormais são definidos pelas bases  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  e  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  e um vetor arbitrário  $\vec{r}$  pode ser representado como:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \\ &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3.\end{aligned}\tag{A.7}$$

Considere  $\theta$  como sendo a rotação do eixo  $\vec{e}_1$  com relação ao eixo  $\vec{e}_x$ . Então, os vetores das bases são relacionados como

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y \\ \vec{e}_2 &= -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}_z.\end{aligned}\tag{A.8}$$

Introducindo a Eq. A.8 na Eq. A.7, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix},\tag{A.9}$$

a qual pode ser expressa na forma compacta

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}.\tag{A.10}$$

em que identificamos a matrix de rotação  $[R]$ .

Seja  $[\sigma]$  e  $[\sigma^L]$  as matrizes que representam um tensor nas bases  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  e  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  respectivamente. Neste caso, temos

$$[\sigma] \vec{v} \cdot \vec{v} = [\sigma]^L \vec{v}^L \cdot \vec{v}^L,\tag{A.11}$$

em que  $\vec{v}$  é arbitrário e

$$\vec{v} = [R] \vec{v}^L.\tag{A.12}$$

Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned} [\sigma] \vec{v} \cdot \vec{v} &= [\sigma] [R] \vec{v}^L \cdot [R] \vec{v}^L \\ &= [R]^T [\sigma] [R] \vec{v}^L \cdot \vec{v}^L, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

ou seja:

$$[\sigma]^L \vec{v}^L \cdot \vec{v}^L = [R]^T [\sigma] [R] \vec{v}^L \cdot \vec{v}^L. \quad (\text{A.14})$$

Como  $\vec{v}^L$  é arbitrário, pode-se deduzir que

$$[\sigma]^L = [R]^T [\sigma] [R] \quad (\text{A.15})$$

ou

$$[\sigma] = [R] [\sigma]^L [R]^T.$$

Considerando agora que

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

e que

$$[\sigma]^L = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

pode-se definir os vetores

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}^T &= \{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy} \} \\ \text{e} \\ (\vec{\sigma}^L)^T &= \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12} \}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Substituindo-se as Eq (A.16), (A.17) e  $[R]$ , na Eq. (A.15), tem-se

$$\vec{\sigma} = [T_\sigma] \vec{\sigma}^L. \quad (\text{A.19})$$

A matriz  $[T_\sigma]$  transforma as tensões dadas no sistema de coordenadas de ortotropia em tensões no sistema de coordenadas de referência.

De uma maneira muito similar tem-se

$$\vec{\varepsilon} = [T_\varepsilon] \vec{\varepsilon}^L \quad (\text{A.20})$$

na qual

$$\vec{\epsilon}^T = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}\}. \quad (\text{A.21})$$

A matriz  $[T_\epsilon]$  transforma as deformações dadas no sistema de coordenadas de ortotropia em deformações no sistema de coordenadas de referência.

Invertendo as relações acima, obtém-se

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}^L &= [T_\sigma]^{-1} \vec{\sigma} \\ \vec{\epsilon}^L &= [T_\epsilon]^{-1} \vec{\epsilon}, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

o que permite-se obter

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= [T_\sigma] \vec{\sigma}^L \\ \vec{\sigma} &= [T_\sigma] [Q^L] \vec{\epsilon}^L \\ \vec{\sigma} &= [T_\sigma] [Q^L] [T_\epsilon]^{-1} \vec{\epsilon} \\ \vec{\sigma} &= [Q] \vec{\epsilon}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

em que identificamos

$$[Q] = [T_\sigma] [Q^L] [T_\epsilon]^{-1} \quad (\text{A.24})$$

sendo  $[Q]$  a matriz constitutiva no sistema de referência, a qual pode ser expressa como

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & Q_{26} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & Q_{36} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{54} & Q_{55} & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{63} & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

No caso da relação inversa,  $[S] = [Q]^{-1}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon} &= [T_\epsilon] \vec{\epsilon}^L \\ \vec{\epsilon} &= [T_\epsilon] [S^L] \vec{\sigma}^L \\ \vec{\epsilon} &= [T_\epsilon] [S^L] [T_\sigma]^{-1} \vec{\sigma} \\ \vec{\epsilon} &= [T_\epsilon] [S^L] [T_\epsilon]^T \vec{\sigma} \\ \vec{\epsilon} &= [S] \vec{\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

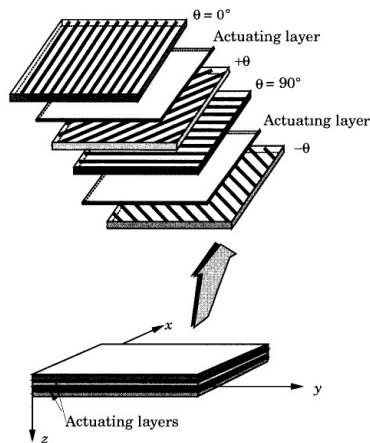
o que fornece

$$[S] = [T_\epsilon] [S^L] [T_\epsilon]^T, \quad (\text{A.27})$$

a qual pode ser expressa como

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{54} & S_{55} & 0 \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.28})$$

Desta forma, para a  $k$ -ésima lâmina, por exemplo na Figura A.3.



**Figura A.3:** Orientação das placas laminadas (REDDY, 2004).

Tem-se:

$$\vec{\sigma}^{(k)} = [Q]^{(k)} \vec{\epsilon}^{(k)}. \quad (\text{A.29})$$

### A.3 Estado plano de tensões

Como a maioria dos laminados são tipicamente finos e são sujeitos à tensões planas, tem-se que  $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ . Da condição de  $\sigma_{33} = 0$

obtem-se

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [\check{S}] \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix},$$

a qual pode ser expressa como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.31})$$

em que

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{\check{S}_{22}}{\check{S}_{11}\check{S}_{22} - \check{S}_{12}^2} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ C_{12} &= \frac{\check{S}_{12}}{\check{S}_{11}\check{S}_{22} - \check{S}_{12}^2} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ C_{22} &= \frac{\check{S}_{11}}{\check{S}_{11}\check{S}_{22} - \check{S}_{12}^2} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ C_{66} &= \frac{1}{\check{S}_{66}} = G_{12}. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Note que esta equação constitutiva depende apenas de 4 parâmetros materiais, que são:

$$\{E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}\}. \quad (\text{A.33})$$

Para  $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ , tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & -2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

e

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ -\sin(2\theta) & \sin(2\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.35})$$

Consequentemente:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.36})$$

Das equações anteriores pode-se identificar as seguintes expressões:

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_{11} \\ \bar{C}_{12} \\ \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{22} \\ \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{66} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11} \cos^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{22} \sin^4 \theta \\ C_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta \\ C_{22} \cos^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{11} \sin^4 \theta \\ (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta \\ C_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + (C_{11} - 2C_{12} + C_{22} - 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.37})$$

Quando as deformações cisalhantes transversais são incluídas, deve-se adicionar a seguinte relação constitutiva:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.38})$$

em que

$$\begin{aligned} C_{44} &= G_{23} \\ \text{e} \\ C_{55} &= G_{13}. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

No caso das tensões e deformações cisalhantes transversais, temos

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

e

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.41})$$



as quais são relacionadas por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.42})$$

sendo

$$\begin{aligned} \bar{C}_{44} &= C_{44} \cos^2(\theta) + C_{55} \sin^2(\theta), \\ \bar{C}_{45} &= (C_{55} - C_{44}) \sin(\theta) \cos(\theta), \\ \bar{C}_{55} &= C_{44} \sin^2(\theta) + C_{55} \cos^2(\theta). \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Combinando os resultados acima, determina-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.44})$$

em que

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.45})$$

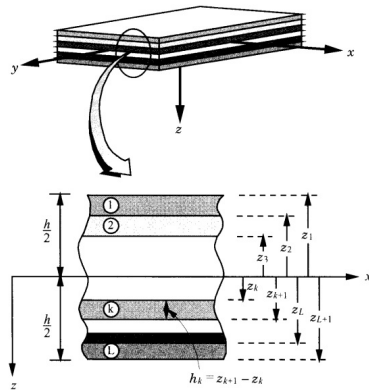
## A.4 Esforços e deformações generalizadas em placas de Mindlin

Nesta dissertação é abordada a teoria de placa proposta por Mindlin que prevê as solicitações de cisalhamento transversal, na qual a relação cons-

titutiva, entre os esforços e deformações generalizadas é dada por

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.46})$$

Para se determinar as matrizes  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[D]$  e  $[F]$  é necessário definir a identificação das lâminas do laminado, bem como as coordenadas inferior e superior de cada lâmina. A Figura A.4 mostra o critério adotado neste trabalho. O laminado tem  $N$  lâminas do laminado, a espessura total do laminado é  $h$  e uma lâmina qualquer  $k$  tem coordenada inferior  $z^k$  e coordenada superior  $z^{k+1}$ .



**Figura A.4:** Identificação das lâminas no laminado (REDDY, 2004).

No caso de considerar materiais compostos tem-se, para a  $k$ -ésima lâmina do composto, a seguinte equação constitutiva:

$$\vec{\sigma}^{(k)} = [\bar{C}]^{(k)} \vec{\varepsilon}^{(k)}. \quad (\text{A.47})$$

Partindo agora da definição de esforços generalizados tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz. \quad (\text{A.48})$$

Porém:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^o + z \kappa_{xx} \\ \varepsilon_{yy}^o + z \kappa_{yy} \\ \gamma_{xy}^o + z \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.49})$$

Substituindo-se as Eq. (A.36), (A.49) na Eq. (A.48), fornece:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \left[ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} (z^{k+1} - z^k) \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} \\ + \left[ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \frac{([z^{k+1}]^2 - [z^k]^2)}{2} \right] \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.50})$$

Por outro lado,

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz. \quad (\text{A.51})$$

Substituindo-se as Eq. (A.36), (A.49) na Eq. (A.51), fornece:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \left[ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \frac{([z^{k+1}]^3 - [z^k]^3)}{3} \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} \\ + \left[ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \frac{([z^{k+1}]^2 - [z^k]^2)}{2} \right] \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.52})$$

Finalmente, pode-se determinar a equação constitutiva generalizada relacionando esforços cortantes e distorções, em que definimos os esforços cortantes como

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{A.53})$$

sendo  $k = 5/6$ . Porém,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.54})$$

o que fornece

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = k \left[ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} (z^{k+1} - z^k) \right] \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.55})$$

Consequentemente, tem-se:

$$[A] = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} (z^{k+1} - z^k), \quad (\text{A.56})$$

$$[B] = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \frac{([z^{k+1}]^2 - [z^k]^2)}{2}, \quad (\text{A.57})$$

$$[D] = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \frac{([z^{k+1}]^3 - [z^k]^3)}{3}, \quad (\text{A.58})$$

e

$$[F] = k \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} (z^{k+1} - z^k). \quad (\text{A.59})$$

Desta forma, pode-se identificar os termos da matriz constitutiva generalizada da placa composita, dada por

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{11} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.60})$$

Tem-se a equação constitutiva relacionando esforços com deformações

generalizadas, expressa por

$$\left\{ \begin{array}{c} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccccc} A_{11} & A_{12} & A_{12} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{11} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\}, \quad (\text{A.61})$$

pode ser reescrita, de forma compacta, como

$$\vec{M} = [\mathbf{D}] \vec{\kappa}. \quad (\text{A.62})$$



## APÊNDICE B – PLACA ISOTRÓPICA

### B.1 Determinação da equação constitutiva

No caso da placa isotrópica, considera-se que a lâmina está sujeita a um estado plano de tensões, dados por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbb{D}_o^{PS}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

em que

$$\mathbb{D}_o^{PS} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

sendo  $E$  o módulo de Young e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

Adicionalmente, o modelo de placa de Mindlin considera o efeito da deformação cisalhante transversal, a qual está relacionada com as tensões cisalhantes transversais como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = [\mathbb{D}_o^{Shear}] \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}$$

sendo

$$[\mathbb{D}_o^{Shear}] = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Considere a equação constitutiva relacionando as tensões e deformações generalizadas dada por

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Para identificarmos as constantes materiais acima, fazemos uso das ex-

pressões:

- Forças generalizadas e deformações generalizadas de membrana. Neste caso, partindo da relação

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= [\mathbb{D}_o^{PS}] (z^2 - z^1) \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} \\ &+ \left[ \mathbb{D}_o^{PS} \frac{([z^2]^2 - [z^1]^2)}{2} \right] \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

em que identificamos as coordenadas  $z^i$  da única lâmina isotrópica como

$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{h}{2} \\ \text{e} \\ z^1 &= -\frac{h}{2}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

podemos determinar

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = h [\mathbb{D}_o^{PS}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Como resultado, obtemos a identificação das matrizes de constantes materiais  $[A]$  e  $[B]$  como

$$[A] = h [\mathbb{D}_o^{PS}] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

e

$$[B] = 0.$$

- Momentos generalizados e curvaturas generalizadas. Neste caso, par-



tindo da relação

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \left[ [\mathbb{D}_o^{PS}] \frac{([z^2]^2 - [z^1]^2)}{2} \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \left[ [\mathbb{D}_o^{PS}] \frac{([z^2]^3 - [z^1]^3)}{3} \right] \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

em que identificamos as coordenadas  $z^i$  da única lâmina isotrópica como

$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{h}{2} \\ \mathbf{e} \\ z^1 &= -\frac{h}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

podemos determinar

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{h^3}{12} [\mathbb{D}_o^{PS}] \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (\text{B.11})$$

i.e.,

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

Como resultado, obtemos a identificação das matrizes de constantes materiais  $[B]$  e  $[D]$  como

$$\begin{aligned} [B] &= 0 \\ \mathbf{e} \\ [D] &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

- Esforços cortantes generalizados e deformações cisalhantes generalizadas. Neste caso, partindo da relação

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = k_s (z^2 - z^1) \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

em que identificamos as coordenadas  $z^i$  da única lâmina isotrópica como

$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{h}{2} \\ \text{e} \\ z^1 &= -\frac{h}{2} \end{aligned}$$

podemos determinar

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = k_s h \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.15})$$

Como resultado, obtemos a identificação da matriz de constantes materiais  $[F]$  como

$$[F] = k_s h \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

Em resumo, a relação constitutiva entre esforços e deformações generalizadas, para um material elástico, linear e isotrópico, é dada por

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

sendo que

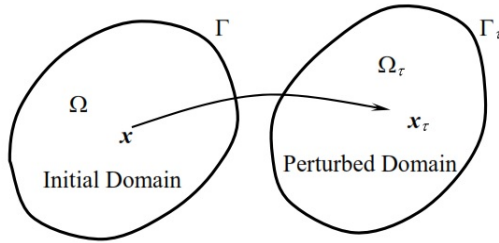
$$\begin{aligned} [A] &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \\ [B] &= 0, \\ [D] &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \\ \text{e} \\ [F] &= k_s h \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

## APÊNDICE C – ANÁLISE DA SENSIBILIDADE

### C.1 Derivada material

#### C.1.1 Mudança de domínio e velocidade de deformação

Considere um domínio  $\Omega$  em uma, duas, ou três dimensões, como mostrado esquematicamente na Figura C.1. A geometria inicial da estrutura  $\Omega$  é mudada para a nova geometria  $\Omega_\tau$  utilizando o método de otimização paramétrica, abaixo definida.



**Figura C.1:** Perturbação de domínio induzido por mapeamento  $T$  (CHOI; KIM, 2006).

Aqui, um parâmetro escalar  $\tau$  indica a quantidade de mudança de forma variável na direção da variável de projeto, tal que em  $\tau = 0$  representa a geometria inicial  $\Omega$ . Esta perturbação da forma (domínio) pode ser considerada um mapeamento (transformação ou deformação) de  $\Omega$  em  $\Omega_\tau$ , o qual é designado por  $T$ , como mostrado na Figura C.1. O mapeamento  $T : \vec{x} \rightarrow \vec{y}_\tau$ ,  $\vec{x} \in \Omega$  é dado por

$$\vec{y}_\tau = T(\vec{x}, \tau) = T_\tau(\vec{x}). \quad (\text{C.1})$$

Assim,

$$\vec{x} = T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau), \quad (\text{C.2})$$

e

$$\Omega_\tau = T_\tau(\Omega). \quad (\text{C.3})$$

O processo de deformação de  $\Omega$  em  $\Omega_\tau$  pelo mapeamento da Eq. (C.1), pode ser visto como um processo dinâmico de deformação de um contínuo, com  $\tau$  desempenhando o papel de tempo. No tempo inicial  $\tau = 0$ , o domínio

é  $\Omega$ . A trajetória de um ponto  $\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})$ , começando em  $\tau = 0$ , pode agora ser seguida. O ponto inicial se move para  $\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})$ . Ao pensar  $\tau$  como o tempo, a velocidade de deformação pode ser definida como

$$\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) \equiv \vec{v}(\vec{y}_\tau, \tau) \quad (\text{C.4})$$

$$\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) = \vec{V}(x, \tau) \Big|_{\vec{x}=T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)},$$

com

$$\vec{V}(x, \tau) = \frac{d\vec{x}_\tau}{d\tau} = \frac{dT(\vec{x}, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial T(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau},$$

sendo a última igualdade decorrente do fato de que o ponto inicial  $\vec{x}$  não depende de  $\tau$ . Esta velocidade pode também ser expressa em termos da posição da partículas no tempo  $\tau$ . Se é assumido que  $T_\tau^{-1}$  existe, i.e.,  $\vec{x} = T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)$ , então a velocidade de deformação em  $\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})$ , é

$$\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) \equiv \vec{v}(\vec{y}_\tau, \tau) = \frac{d\vec{y}_\tau}{d\tau} \quad (\text{C.5})$$

$$\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) = \frac{\partial T(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\vec{x}=T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)} = \frac{\partial \vec{y}_\tau}{\partial \tau} \Big|_{\vec{x}=T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)} = \frac{\partial \vec{y}_\tau}{\partial \tau} \circ T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau).$$

A trajetória da partícula que estava no ponto  $\vec{x}$  em  $\tau = 0$  agora é definida pelo problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{y}_\tau}{d\tau} &= \vec{v}(\vec{y}_\tau, \tau) \\ \text{sendo} \\ \vec{y}_{\tau=0} &= \vec{x}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Assim, se  $T$  é dado, então a velocidade de deformação  $\vec{v}(\vec{y}_\tau, \tau)$  pode ser construída. Por outro lado, se o campo da velocidade de deformação  $\vec{v}(\vec{y}_\tau, \tau)$  é dado, então o mapeamento  $T$  pode ser definido como

$$T(\vec{x}, \tau) = \vec{y}_\tau, \quad (\text{C.7})$$

em que  $\vec{y}_\tau$  é a solução do problema de valor inicial, dada na Eq. (C.6).

Se a transformação  $T(\vec{x}, \tau)$  é assumida como sendo regular na vizinhança de  $\tau = 0$ , então ela pode ser expandida utilizando uma série de

Taylor em torno de  $\tau = 0$  como

$$T(\vec{x}, \tau) = T(\vec{x}, 0) + \frac{1}{1!} \left. \frac{\partial T(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \tau + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 T(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=0} \tau^2 \quad (C.8)$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n T(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau^n} \right|_{\tau=0} \tau^n + \dots$$

Para determinar a análise de sensibilidade de primeira ordem, os dois primeiros termos da expansão da série de Taylor  $T(\vec{x}, \tau)$  são usados. Assim, ignorando termos de ordem superior, a seguinte relação de mapeamento linear é obtida

$$T(\vec{x}, \tau) = T(\vec{x}, 0) + \left. \frac{\partial T(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \tau + o(\tau^2)$$

sendo

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{o(\tau^2)}{\tau} = 0. \quad (C.9)$$

Desta forma,

$$T(\vec{x}, \tau) = T(\vec{x}, 0) + \vec{V}(\vec{x}, 0) \tau + o(\tau^2), \quad (C.10)$$

a qual pode ser aproximada por

$$\vec{y}_\tau = T(\vec{x}, \tau)$$

$$\vec{y}_\tau = \vec{x} + \tau \vec{V}(\vec{x})$$

sendo

$$\vec{V}(\vec{x}) \equiv \vec{V}(\vec{x}, 0). \quad (C.11)$$

A variação do domínio induzida por este mapeamento linear é mostrada na Figura C.2.

## C.2 Teoremas importantes

### Teorema 1

Seja  $A \subset R^n$  um conjunto aberto e considere, para cada  $\tau \in R$ , que  $T_\tau : A \subset R^n \rightarrow R^n$  seja de classe  $C^1$ . Seja  $\vec{x}_o \in A$  e suponha que  $J_{T_\tau}(\vec{x}_o) \neq 0$ , sendo

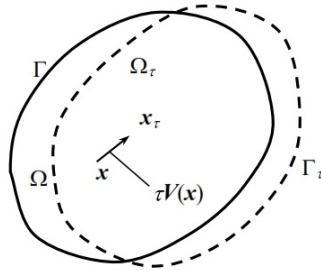
$$J_{T_\tau}(\vec{x}_o) = \det[DT_\tau(\vec{x}_o)] = \det[\nabla_{\vec{x}} T_\tau(\vec{x}_o)]$$

sendo

$$[DT_\tau(\vec{x}_o)] = \frac{\partial \vec{y}_\tau(\vec{x}_o)}{\partial \vec{x}} = \nabla_{\vec{x}} T_\tau(\vec{x}_o) = I + \tau \nabla_{\vec{x}} \vec{V}(\vec{x}_o) \quad (C.12)$$

com

$$\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x}).$$



**Figura C.2:** Variação de domínio utilizando o mapeamento linear (CHOI; KIM, 2006).

Então, existe uma vizinhança  $U$  de  $\vec{x}_o$  em  $A$  e um conjunto aberto  $W$  de  $T_\tau(A)$  tal que  $T_\tau(U) = W$  e  $T_\tau(\cdot)$  tem uma inversa de classe  $C^1$ ,  $T_\tau^{-1} : W \rightarrow U$ . Adicionalmente, para  $\vec{y}_\tau \in W$ ,  $\vec{x} = T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)$ , temos

$$\begin{aligned}
 [DT_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)] &= [DT_\tau(\vec{x})]^{-1} \\
 \text{sendo} \\
 [DT_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)]_{ij} &= \frac{\partial(\vec{x})_i}{\partial(\vec{y}_\tau)_j} \\
 \text{o qual pode ser escrito como} \\
 \left[ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}_\tau} \right]_{\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})} &= \left[ \frac{\partial \vec{y}_\tau}{\partial \vec{x}} \right]^{-1} \\
 \text{ou na forma de componente} \\
 \left[ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}_\tau} \right]_{\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})} &= \left[ \frac{\partial \vec{y}_\tau}{\partial \vec{x}} \right]_{ij}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

Como resultado, o gradiente da transformação  $T(\vec{x}, \tau)$  com relação a  $\vec{x}$  é dado por

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\vec{x}} T_\tau(\vec{x}) &\equiv F(\vec{x}, \tau) = \frac{\partial \vec{y}_\tau}{\partial \vec{x}} \\
 &= \frac{\partial T(\vec{x}, \tau)}{\partial \vec{x}} \\
 &= I + \tau \nabla_{\vec{x}} \vec{V}(\vec{x}).
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

Sua inversa, i.e.  $F(\vec{x}, \tau)^{-1}$ , pode ser determinada por

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, \tau)^{-1} &= \left. \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}_\tau} \right|_{\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})} = \left. \frac{\partial T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)}{\partial \vec{y}_\tau} \right|_{\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})} \\ &= [\nabla_{\vec{x}} T_\tau(\vec{x})]^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Note que

$$\vec{V}(\vec{x}, \tau) = \frac{\partial \vec{y}_\tau}{\partial \tau} = \frac{\partial T(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} = \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) \quad (\text{C.16})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}(\vec{x}, \tau)}{\partial \vec{x}} &= \frac{\partial^2 T(\vec{x}, \tau)}{\partial \vec{x} \partial \tau} \\ &= \frac{\partial^2 T(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau \partial \vec{x}} \\ &= \frac{\partial F(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} = \dot{F}(\vec{x}, \tau). \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Adicionalmente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))}{\partial \vec{x}} &= \frac{\partial \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))}{\partial \vec{y}_\tau} \frac{\partial \vec{y}_\tau}{\partial \vec{x}} \\ &= L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) F(\vec{x}, \tau). \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Igualando (C.17) com (C.18) implica

$$\begin{aligned} \dot{F}(\vec{x}, \tau) &= L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) F(\vec{x}, \tau) \\ \text{where} \\ L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) &= \left. \frac{\partial \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)}{\partial \vec{y}_\tau} \right|_{\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})}. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Consequentemente

$$L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) = \dot{F}(\vec{x}, \tau) F(\vec{x}, \tau)^{-1} \quad (\text{C.20})$$

Considere, agora, o determinante de  $F(\vec{x}, \tau)$ , denominado por

$$j(\vec{x}, \tau) = \det[F(\vec{x}, \tau)], \quad (\text{C.21})$$

o qual ocorre, como consequencia da troca de variáveis  $\vec{y} = T(\vec{x}, \tau)$ , em um

elemento de volume

$$\begin{aligned} d\Omega_\tau &= j(\vec{x}, \tau) d\Omega_o \\ \text{em que} \\ j(\vec{x}, \tau) &= \det[F(\vec{x}, \tau)] \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

O objetivo, a seguir, consiste na determinação de  $\frac{dj(\vec{x}, \tau)}{d\tau}$ .

**Teorema 2**

Seja  $P$  um tensor de segunda ordem. Então, têm-se da análise tensorial, que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{\det[P(\tau)]\} &= \det[P(\tau)] \operatorname{tr} \left( [\dot{P}(\tau)] [P(\tau)]^{-1} \right) \\ \text{sendo} \\ \dot{P}(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \{P(\tau)\}. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Note que

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, \tau) &= I + \tau \nabla_{\vec{x}} \vec{V}(\vec{x}) \\ \dot{F}(\vec{x}, \tau) &= \nabla_{\vec{x}} \vec{V}(\vec{x}) \\ \text{e} \\ [\dot{F}(\vec{x}, \tau)] [F(\vec{x}, \tau)]^{-1} &= L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) \\ \text{em que} \\ L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) &= \left. \frac{\partial \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)}{\partial \vec{y}_\tau} \right|_{\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})}. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{j(\vec{x}, \tau)\} &= \frac{d}{d\tau} \{\det F(\vec{x}, \tau)\} \\ &= \det[F(\vec{x}, \tau)] \operatorname{tr} \left( [\dot{F}(\vec{x}, \tau)] [F(\vec{x}, \tau)]^{-1} \right) \\ &= j(\vec{x}, \tau) \operatorname{tr} (L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))) \\ &= j(\vec{x}, \tau) \operatorname{tr} \left( [\nabla_{\vec{y}_\tau} \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)] \Big|_{\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})} \right) \\ &= j(\vec{x}, \tau) \operatorname{div} (\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))) \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

**Teorema 3** (Formula integral de Hadamard)

Seja  $\Omega$  um domínio  $C^1$  em  $\mathbb{R}^N$  e  $V$  um campo vetorial  $C^1$ . Seja  $f$  a função no espaço  $C^1((0, \varepsilon), C^0(\Omega_\tau)) \cap C^0((0, \varepsilon), C^1(\Omega_\tau))$ . Então, o funcio-



nal, definido por

$$\begin{aligned}
 J_1(f_\tau, \Omega_\tau) &= \int_{\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) d\Omega_\tau \\
 \text{em que} \\
 \vec{y}_\tau &= T_\tau(\vec{x}) = T(\vec{x}, \tau) = \vec{x} + \tau \vec{V}(\vec{x}) \\
 \text{com} \\
 \vec{V}(\vec{x}) &= \vec{V}(T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)) = \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)
 \end{aligned} \tag{C.26}$$

é diferenciável e sua derivada é dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} \{J_1(f_\tau, \Omega_\tau)\} &= \\
 &= \int_{\Omega_\tau} \frac{\partial f(\tau, \vec{y}_\tau)}{\partial \tau} + \text{div}[f(\tau, \vec{y}_\tau) \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)] d\Omega_\tau \\
 \text{i.e.} \\
 \frac{d}{d\tau} \{J_1(f_\tau, \Omega_\tau)\} &= \\
 &= \int_{\Omega_\tau} \frac{\partial f(\tau, \vec{y}_\tau)}{\partial \tau} d\Omega_\tau + \int_{\partial \Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) \cdot \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) dA_\tau.
 \end{aligned} \tag{C.27}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) d\Omega_\tau &= \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_o} f(\tau, \vec{y}_\tau(\vec{x})) j_\tau(\vec{x}) d\Omega_o \\
 \text{em que} \\
 j_\tau(\vec{x}) &= j(\vec{x}, \tau) = \det[\nabla_{\vec{x}} T_\tau(\vec{x})]
 \end{aligned} \tag{C.28}$$

logo

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) d\Omega_\tau &= \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_o} f(\tau, \vec{y}_\tau(\vec{x})) j_\tau(\vec{x}) d\Omega_o \\
 &= \int_{\Omega_o} \frac{d}{d\tau} \{f(\vec{y}_\tau(\vec{x}), \tau)\} j_\tau(\vec{x}) d\Omega_o \\
 &\quad + \int_{\Omega_o} f(\vec{y}_\tau(\vec{x}), \tau) \frac{d}{d\tau} \{j_\tau(\vec{x})\} d\Omega_o \\
 &= \int_{\Omega_\tau} \left( \frac{\partial f_\tau(\vec{y}_\tau)}{\partial \tau} + \nabla_{\vec{y}_\tau} f_\tau(\vec{y}_\tau) \cdot \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) \right) + f_\tau(\vec{y}_\tau) \text{tr}(L_\tau(\vec{y}_\tau)) d\Omega_\tau \\
 &= \int_{\Omega_\tau} \frac{\partial f_\tau(\vec{y}_\tau)}{\partial \tau} + \langle \nabla_{\vec{y}_\tau} f_\tau(\vec{y}_\tau), \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) \rangle + f_\tau(\vec{y}_\tau) \text{div}[\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)] d\Omega_\tau
 \end{aligned} \tag{C.29}$$

sendo

$$\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) = \vec{v}(\vec{x}, \tau)|_{\vec{x}=T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)}$$

e

$$\vec{v}(\vec{x}, \tau) = \frac{d}{d\tau} \left\{ \vec{x}(\vec{X}, \tau) \right\} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \vec{x}(\vec{X}, \tau) \right\}.$$

Aqui, fazendo uso de

$$\text{tr}(L_\tau(\vec{y}_\tau)) = \text{tr}(\nabla_{\vec{y}_\tau} \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)) = \text{div}[\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)] \tag{C.30}$$

e notando que

$$\operatorname{div}(f_{\tau} \vec{v}_{\tau}) = f_{\tau} \operatorname{div}(\vec{v}_{\tau}) + \nabla_{\vec{y}_{\tau}} f_{\tau} \cdot \vec{v}_{\tau} \quad (\text{C.31})$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_{\tau}} f(\tau, \vec{y}_{\tau}) d\Omega_{\tau} &= \int_{\Omega_{\tau}} \left\{ \frac{\partial f(\vec{y}_{\tau}, \tau)}{\partial \tau} + \operatorname{div}(f_{\tau} \vec{v}_{\tau}) \right\} d\Omega_{\tau} \\ &= \int_{\Omega_{\tau}} \frac{\partial f(\vec{y}_{\tau}, \tau)}{\partial \tau} d\Omega_{\tau} + \int_{\partial\Omega_{\tau}} f_{\tau} \vec{v}_{\tau} \cdot \vec{n}_{\tau} dA_{\tau} \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

i.e.

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_{\tau}} f(\tau, \vec{y}_{\tau}) d\Omega_{\tau} = \int_{\Omega_{\tau}} \frac{\partial f(\vec{y}_{\tau}, \tau)}{\partial \tau} d\Omega_{\tau} + \int_{\partial\Omega_{\tau}} f_{\tau} \vec{v}_{\tau} \cdot \vec{n}_{\tau} dA_{\tau}. \quad (\text{C.33})$$

#### Teorema 4

Seja  $\Omega$  um domínio  $C^2$  em  $\mathbb{R}^N$  e  $V$  um campo vetorial  $C^2$ . Seja  $f$  uma função no espaço  $C^1((0, \varepsilon), C^0(\Omega_{\tau})) \cap C^0((0, \varepsilon), C^1(\Omega_{\tau}))$ . Então, o funcional, definido por

$$J_2(f_{\tau}) = \int_{\partial\Omega_{\tau}} f(\tau, \vec{y}_{\tau}) dA_{\tau}, \quad (\text{C.34})$$

é diferenciável e sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{J_2(f_{\tau}, \Omega_{\tau})\} &= \int_{\partial\Omega_{\tau}} \frac{\partial f(\tau, \vec{y}_{\tau})}{\partial \tau} dA_{\tau} \\ &+ \int_{\partial\Omega_{\tau}} \left( H_{\tau}(\vec{y}_{\tau}) f(\tau, \vec{y}_{\tau}) + \frac{\partial f(\tau, \vec{y}_{\tau})}{\partial \vec{n}_{\tau}} \right) \vec{v}_{\tau}(\vec{y}_{\tau}) \cdot \vec{n}_{\tau}(\vec{y}_{\tau}) dA_{\tau} \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

em que

$$H_{\tau}(\vec{y}_{\tau}) = \operatorname{div}[\vec{n}_{\tau}(\vec{y}_{\tau})];$$

sendo  $H_{\tau}(\vec{y}_{\tau})$  a curvatura média do contorno no ponto  $\vec{y}_{\tau}$  e  $\frac{\partial f(\tau, \vec{y}_{\tau})}{\partial \vec{n}_{\tau}} = \langle \nabla_{\vec{y}_{\tau}} f, \vec{n}_{\tau} \rangle$  a derivada normal (direcional).

De fato,

$$DJ_2(f, \Omega_o) \left[ \vec{V} \right] = \frac{d}{d\tau} \int_{\partial\Omega_{\tau}} f(\tau, \vec{y}_{\tau}) dA_{\tau} \Big|_{\tau=0} \quad (\text{C.36})$$

Visando derivar o teorema acima, derivamos inicialmente a relação entre os elementos de área. Considere as relações

$$\vec{n}_{\tau} dA_{\tau} = j_{\tau} \left( F_{\tau}^{-1} \right)^T \vec{n}_o dA_o \quad (\text{C.37})$$

e

$$\vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_\tau = 1 \quad (\text{C.38})$$

então

$$\begin{aligned} \vec{n}_\tau dA_\tau \cdot \vec{n}_\tau dA_\tau &= \vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_\tau dA_\tau^2 \\ &= dA_\tau^2 \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

$$\begin{aligned} &= j_\tau (F_\tau^{-1})^T \vec{n}_o dA_o \cdot j_\tau (F_\tau^{-1})^T \vec{n}_o dA_o \\ &= j_\tau^2 \left\langle (F_\tau^{-1})^T \vec{n}_o, (F_\tau^{-1})^T \vec{n}_o \right\rangle dA_o^2 \\ &= j_\tau^2 \left\| (F_\tau^{-1})^T \vec{n}_o \right\|^2 dA_o^2. \end{aligned}$$

Agora, tomando a raiz quadrada em ambas as partes obtemos

$$dA_\tau = j_\tau \left\| (F_\tau^{-1})^T \vec{n}_o \right\| dA_o \quad (\text{C.40})$$

logo

$$\vec{n}_\tau j_\tau \left\| [F_\tau^{-T}] \vec{n}_o \right\| dA_o = j_\tau [F_\tau^{-T}] \vec{n}_o dA_o \quad (\text{C.41})$$

i.e.

$$\vec{n}_\tau = \frac{[F_\tau^{-T}] \vec{n}_o}{\left\| [F_\tau^{-T}] \vec{n}_o \right\|} \quad (\text{C.42})$$

então

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau} \int_{\partial\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) dA_\tau \\ &= \frac{d}{d\tau} \int_{\partial\Omega_o} \left\{ f(\vec{y}_\tau(\vec{x}), \tau) j_\tau(\vec{x}) \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| \right\} dA_o \\ &= \int_{\partial\Omega_o} \frac{d}{d\tau} \{ f(\vec{y}_\tau(\vec{x}), \tau) \} j_\tau(\vec{x}) \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| dA_o \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_o} f(\vec{y}_\tau(\vec{x}), \tau) \frac{d}{d\tau} \{ j_\tau(\vec{x}) \} \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| dA_o \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_o} f(\vec{y}_\tau(\vec{x}), \tau) j_\tau(\vec{x}) \left( \frac{d}{d\tau} \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| \right) dA_o \\ &= \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{d}{d\tau} \{ f_\tau(\vec{y}_\tau) \} dA_\tau + \int_{\partial\Omega_\tau} f_\tau(\vec{y}_\tau) \operatorname{div}(\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)) dA_\tau \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_o} f(\vec{y}_\tau(\vec{x}), \tau) j_\tau(\vec{x}) \left( \frac{d}{d\tau} \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| \right) dA_o. \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

Porém

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\|^2 &= \\ &= \frac{d}{d\tau} \left\langle (F_\tau^{-1})^T \vec{n}_o, (F_\tau^{-1})^T \vec{n}_o \right\rangle \\ &= 2 \left\langle (F_\tau^{-1})^T \vec{n}_o, \frac{d}{d\tau} \left\{ (F_\tau^{-1})^T \vec{n}_o \right\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (C.44)$$

Adicionalmente

$$F_\tau^T F_\tau^{-T} = I \quad (C.45)$$

logo

$$\frac{dF_\tau^T}{d\tau} F_\tau^{-T} + F_\tau^T \frac{dF_\tau^{-T}}{d\tau} = 0 \quad (C.46)$$

i.e.

$$\frac{dF_\tau^{-T}}{d\tau} = -F_\tau^{-T} \frac{dF_\tau^T}{d\tau} F_\tau^{-T} \quad (C.47)$$

o que implica

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\|^2 &= \\ &= -2 \left\langle [F_\tau^{-T}] \vec{n}_o, \left[ F_\tau^{-T} \frac{dF_\tau^T}{d\tau} F_\tau^{-T} \right] \vec{n}_o \right\rangle. \end{aligned} \quad (C.48)$$

Mas,

$$\frac{dF_\tau}{d\tau} = [L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))] F_\tau \quad (C.49)$$

logo

$$\frac{dF_\tau^T}{d\tau} = F_\tau^T [L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))]^T \quad (C.50)$$

então

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\|^2 &= \\ &= -2 \left\langle [F_\tau^{-T}] \vec{n}_o, \left[ F_\tau^{-T} F_\tau^T [L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))]^T F_\tau^{-T} \right] \vec{n}_o \right\rangle \\ &= -2 \left\langle [F_\tau^{-T}] \vec{n}_o, [L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))]^T F_\tau^{-T} \vec{n}_o \right\rangle \\ &= -2 \left\langle [L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))] [F_\tau^{-T}] \vec{n}_o, [F_\tau^{-T}] \vec{n}_o \right\rangle \\ &= 2 \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| \left\| \frac{d}{d\tau} \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| \right\| \end{aligned} \quad (C.51)$$

consequentemente

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| &= - \frac{\langle [L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))][F_\tau^{-T}] \vec{n}_o, [F_\tau^{-T}] \vec{n}_o \rangle}{\left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\|} \\
 &= - \frac{\langle [L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))][F_\tau^{-T}] \vec{n}_o, [F_\tau^{-T}] \vec{n}_o \rangle}{\left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\|^2} \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| \\
 &= - \left\langle [L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))] \frac{[F_\tau^{-T}] \vec{n}_o}{\left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\|}, \frac{[F_\tau^{-T}] \vec{n}_o}{\left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\|} \right\rangle \\
 &\quad * \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| \\
 &= - \langle [L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))] \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})), \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) \rangle \\
 &\quad * \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\|
 \end{aligned} \tag{C.52}$$

então

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} \int_{\partial\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) dA_\tau &= \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{d}{d\tau} \{f_\tau(\vec{y}_\tau)\} dA_\tau \\
 &\quad + \int_{\partial\Omega_\tau} f_\tau(\vec{y}_\tau) \operatorname{div}(\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)) dA_\tau \\
 &\quad - \int_{\partial\Omega_o} \{f_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) \langle [L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))] \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})), \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) \rangle \\
 &\quad \quad j_\tau(\vec{x}) \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| \} dA_o
 \end{aligned} \tag{C.53}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} \int_{\partial\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) dA_\tau &= \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{d}{d\tau} \{f_\tau(\vec{y}_\tau)\} dA_\tau \\
 &\quad + \int_{\partial\Omega_\tau} f_\tau(\vec{y}_\tau) \operatorname{div}(\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)) dA_\tau \\
 &\quad - \int_{\partial\Omega_\tau} f_\tau(\vec{y}_\tau) \langle [L_\tau(\vec{y}_\tau)] \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau), \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) \rangle dA_\tau.
 \end{aligned} \tag{C.54}$$

a qual pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} \int_{\partial\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) dA_\tau &= \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{\partial f_\tau(\vec{y}_\tau)}{\partial \tau} dA_\tau \\
 &\quad + \int_{\partial\Omega_\tau} \langle \nabla_{\vec{y}_\tau} f_\tau(\vec{y}_\tau), \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) \rangle dA_\tau \\
 &\quad + \int_{\partial\Omega_\tau} f(\vec{y}_\tau, \tau) \{ \operatorname{div}(\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)) - \langle [L_\tau(\vec{y}_\tau)] \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau), \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) \rangle \} dA_\tau
 \end{aligned} \tag{C.55}$$

Porém, supondo que o campo de velocidade é do tipo

$$\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) = v_{\tau_n}(\vec{y}_\tau) \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) \tag{C.56}$$

deriva-se

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\vec{v}_\tau) - \langle [L_\tau] \vec{n}_\tau, \vec{n}_\tau \rangle &= \\
 &= \operatorname{div}(\vec{v}_\tau) - \langle [\nabla_{\vec{y}_\tau} \vec{v}_\tau] \vec{n}_\tau, \vec{n}_\tau \rangle \\
 &= \operatorname{div}(v_{\tau_n} \vec{n}_\tau) - \langle [\nabla_{\vec{y}_\tau} (v_{\tau_n} \vec{n}_\tau)] \vec{n}_\tau, \vec{n}_\tau \rangle.
 \end{aligned} \tag{C.57}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \text{div}(\phi_\tau \vec{u}_\tau) &= \text{grad}[\phi_\tau] \cdot \vec{u}_\tau + \phi_\tau \text{div}[\vec{u}_\tau] \\ \text{e} \\ \text{grad}[\phi_\tau \vec{u}_\tau] &= \vec{u}_\tau \otimes \text{grad}[\phi_\tau] + \phi_\tau \text{grad}[\vec{u}_\tau] \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

logo

$$\begin{aligned} \text{div}[v_{\tau_n} \vec{n}_\tau] &= \nabla_{\vec{y}_\tau} v_{\tau_n} \cdot \vec{n}_\tau + v_{\tau_n} \text{div}[\vec{n}_\tau] \\ \text{e} \\ [\nabla_{\vec{y}_\tau} (v_{\tau_n} \vec{n}_\tau)] &= \vec{n}_\tau \otimes \nabla_{\vec{y}_\tau} v_{\tau_n} + v_{\tau_n} [\nabla_{\vec{y}_\tau} \vec{n}_\tau] \end{aligned} \quad (\text{C.59})$$

fornecendo

$$\begin{aligned} \text{div}[\vec{v}_\tau] - \langle [\nabla_{\vec{y}_\tau} \vec{v}_\tau] \vec{n}_\tau, \vec{n}_\tau \rangle &= \text{div}[v_{\tau_n} \vec{n}_\tau] \\ &- \langle [\vec{n}_\tau \otimes \nabla_{\vec{y}_\tau} v_{\tau_n} + v_{\tau_n} [\nabla_{\vec{y}_\tau} \vec{n}_\tau]] \vec{n}_\tau, \vec{n}_\tau \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

Contudo, nota-se por definição, que

$$\vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_\tau = 1 \quad (\text{C.61})$$

a qual pode ser expressa em componentes como

$$\{\vec{n}_\tau\}_i \{\vec{n}_\tau\}_i = 1. \quad (\text{C.62})$$

o que implica

$$\frac{\partial}{\partial \{\vec{y}_\tau\}_j} (\{\vec{n}_\tau\}_i \{\vec{n}_\tau\}_i) = 0 \quad (\text{C.63})$$

i.e.

$$\{\vec{n}_\tau\}_i \frac{\partial \{\vec{n}_\tau\}_i}{\partial \{\vec{y}_\tau\}_j} = 0 \quad (\text{C.64})$$

a qual pode ser expressa de forma compacta como

$$[\nabla_{\vec{y}_\tau} \vec{n}_\tau]^T \vec{n}_\tau = 0. \quad (\text{C.65})$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} &\langle [\vec{n}_\tau \otimes \nabla_{\vec{y}_\tau} v_{\tau_n} + v_{\tau_n} [\nabla_{\vec{y}_\tau} \vec{n}_\tau]] \vec{n}_\tau, \vec{n}_\tau \rangle = \\ &= \langle [\vec{n}_\tau \otimes \nabla_{\vec{y}_\tau} v_{\tau_n}] \vec{n}_\tau, \vec{n}_\tau \rangle + v_{\tau_n} \langle \vec{n}_\tau, [\nabla_{\vec{y}_\tau} \vec{n}_\tau]^T \vec{n}_\tau \rangle \\ &= \langle \nabla_{\vec{y}_\tau} v_{\tau_n}, \vec{n}_\tau \rangle \langle \vec{n}_\tau, \vec{n}_\tau \rangle \\ &= \langle \nabla_{\vec{y}_\tau} v_{\tau_n}, \vec{n}_\tau \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.66})$$

logo

$$\operatorname{div} [\vec{v}_\tau] - \langle [\nabla_{\vec{y}_\tau} \vec{v}_\tau] \vec{n}_\tau, \vec{n}_\tau \rangle = \operatorname{div} [v_{\tau_n} \vec{n}_\tau] - \langle \nabla_{\vec{y}_\tau} v_{\tau_n}, \vec{n}_\tau \rangle$$

$$= v_{\tau_n} \operatorname{div} [\vec{n}_\tau]$$
(C.67)

i.e.

$$\operatorname{div} [\vec{v}_\tau] - \langle [\nabla_{\vec{y}_\tau} \vec{v}_\tau] \vec{n}_\tau, \vec{n}_\tau \rangle = v_{\tau_n} \operatorname{div} [\vec{n}_\tau]$$

para uma velocidade do tipo

$$\vec{v}_\tau = v_{\tau_n} \vec{n}_\tau.$$
(C.68)

Consequentemente

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\partial\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) dA_\tau = \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{d}{d\tau} \{f(\vec{y}_\tau, \tau)\} dA_\tau$$

$$+ \int_{\partial\Omega_\tau} f(\vec{y}_\tau, \tau) v_{\tau_n}(\vec{y}_\tau) \operatorname{div} [\vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau)] dA_\tau.$$
(C.69)

Então, definindo

$$H_\tau(\vec{y}_\tau) = \operatorname{div} [\vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau)]$$
(C.70)

obtém-se finalmente

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\partial\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) dA_\tau = \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{\partial f}{\partial \tau}(\vec{y}_\tau, \tau) dA_\tau$$

$$+ \int_{\partial\Omega_\tau} \left\{ \langle \nabla_{\vec{y}_\tau} f_\tau, \vec{n}_\tau \rangle + f(\vec{y}_\tau, \tau) H_\tau(\vec{y}_\tau) \right\} v_{\tau_n}(\vec{y}_\tau) dA_\tau$$
(C.71)

$$= \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{\partial f}{\partial \tau}(\vec{y}_\tau, \tau) dA_\tau$$

$$+ \int_{\partial\Omega_\tau} \left\{ \frac{\partial f_\tau}{\partial \vec{n}_\tau} + f(\vec{y}_\tau, \tau) H_\tau(\vec{y}_\tau) \right\} v_{\tau_n}(\vec{y}_\tau) dA_\tau$$

i.e.

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\partial\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) dA_\tau = \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{\partial f}{\partial \tau}(\vec{y}_\tau, \tau) dA_\tau$$

$$+ \int_{\partial\Omega_\tau} \left\{ \frac{\partial f_\tau}{\partial \vec{n}_\tau} + f(\vec{y}_\tau, \tau) H_\tau(\vec{y}_\tau) \right\} v_{\tau_n}(\vec{y}_\tau) dA_\tau.$$
(C.72)





## APÊNDICE D – MÉTODO DE GALERKIN LIVRE DE ELEMENTOS

O método de Galerkin livre de elementos consiste basicamente na construção de um conjunto de funções base, ou de forma, que definem o espaço de aproximação, o qual é utilizado para a determinação de uma aproximação pela aplicação do método de Galerkin (TELES, 2007). O método de Galerkin livre de elementos usa a aproximação por mínimos quadrados móveis (MLS) para construir as funções base ou de forma (BELYTSCHKO; LU; GU, 1994).

### D.1 Aproximação por mínimos quadrados móveis

Este método consiste em uma aproximação por mínimos quadrados ponderada, na qual uma função de aproximação  $u^h$  é construída a partir de um conjunto de dados discretos  $(u_I, \vec{x}_I)$ ,  $I = 1 \dots n_T$ , em que  $n_T$  é o número total de partículas (nós) em um domínio  $\Omega$ . A função de aproximação é definida como:

$$u^h(\vec{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\vec{x}) a_j(\vec{x}) = \langle \vec{p}(\vec{x}), \vec{a} \rangle \quad (\text{D.1})$$

Na Eq. (D.1),  $p_j(\vec{x})$ ,  $j = 1 \dots m$  representa a base intrínseca;  $a_j$ ,  $j = 1 \dots m$  é o conjunto de coeficientes a ser determinados e  $m$  é o número de elementos de  $p_j(\vec{x})$ .

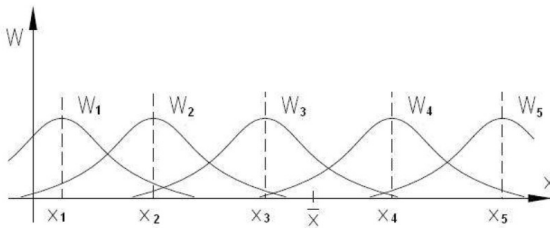
Para determinar o vetor de coeficientes  $\vec{a}(\vec{x})$  é aplicada a norma de erro discreta,  $J(\vec{a})$ , dada por:

$$J(\vec{a}) = \sum_{I=1}^n w(\vec{x} - \vec{x}_I) [\langle \vec{p}(\vec{x}_I), \vec{a} \rangle - u_I]^2. \quad (\text{D.2})$$

A função peso  $w(\vec{x} - \vec{x}_I)$  determina quantas partículas  $n$  da vizinhanza de  $\vec{x}$  participa da determinação de  $\vec{a}(\vec{x})$ , ou seja, quais as partículas  $u_I$  (localizadas em  $\vec{x}_I$ ) têm  $w(\vec{x} - \vec{x}_I) \neq 0$ , como mostra a Figura D.1 para o caso dimensional.

Como resultado da minimização de  $J(\vec{a})$ , é obtida a relação entre  $u^h(\vec{x})$  e os valores discretos  $u_I$ , na vizinhança de  $\vec{x}$ , como:

$$u^h(\vec{x}) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\vec{x}) u_I. \quad (\text{D.3})$$



**Figura D.1:** Funções peso em um problema unidimensional (TELES, 2007).

Na Eq. (D.3),  $\Phi_I(\vec{x})$  é chamada de função de forma global e é obtida como

$$\Phi_I(\vec{x}) = \vec{p}(\vec{x}) \cdot [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} \vec{b}_I(\vec{x}), \quad (\text{D.4})$$

em que  $[\mathbf{A}(\vec{x})]$  é denominada matriz momento e é obtida pela equação:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = \sum_{I=1}^n w(\vec{x} - \vec{x}_I) [\vec{p}(\vec{x}_I) \otimes \vec{p}(\vec{x}_I)]. \quad (\text{D.5})$$

O vetor  $\vec{b}_I(\vec{x})$  é definido como:

$$\vec{b}_I(\vec{x}) = w(\vec{x} - \vec{x}_I) \vec{p}(\vec{x}_I). \quad (\text{D.6})$$

A base intrínseca  $\vec{p}(\vec{x})$  é comumente uma base polinomial, sendo as mais usada as bases linear e quadrática, dadas respectivamente por

$$\vec{p}^T(\vec{x}) = [1 \quad x \quad y] \quad (\text{D.7})$$

e

$$\vec{p}^T(\vec{x}) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2]. \quad (\text{D.8})$$

As componentes do gradiente de  $\Phi_I(\vec{x})$  são

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_I(\vec{x})}{\partial x_i} &= \frac{\partial \vec{p}(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot \mathbf{A}(\vec{x})^{-1} \vec{b}_I(\vec{x}) \\ &+ \vec{p}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(\vec{x})^{-1}}{\partial x_i} \vec{b}_I(\vec{x}) \\ &+ \vec{p}(\vec{x}) \cdot \mathbf{A}(\vec{x})^{-1} \frac{\partial \vec{b}_I(\vec{x})}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

e as componentes da hessiana de  $\Phi_I(\vec{x})$  são

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \Phi_I(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} = & \frac{\partial^2 \vec{p}(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \mathbf{A}(\vec{x})^{-1} \vec{b}_I(\vec{x}) + \frac{\partial \vec{p}(\vec{x})}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(\vec{x})^{-1}}{\partial x_i} \vec{b}_I(\vec{x}) \\
 & + \frac{\partial \vec{p}(\vec{x})}{\partial x_j} \cdot \mathbf{A}(\vec{x})^{-1} \frac{\partial \vec{b}_I(\vec{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial \vec{p}(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(\vec{x})^{-1}}{\partial x_j} \vec{b}_I(\vec{x}) \\
 & + \vec{p}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\vec{x})^{-1}}{\partial x_i \partial x_j} \vec{b}_I(\vec{x}) + \vec{p}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(\vec{x})^{-1}}{\partial x_j} \frac{\partial \vec{b}_I(\vec{x})}{\partial x_i} \\
 & + \frac{\partial \vec{p}(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot \mathbf{A}(\vec{x})^{-1} \frac{\partial \vec{b}_I(\vec{x})}{\partial x_j} + \vec{p}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(\vec{x})^{-1}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{b}_I(\vec{x})}{\partial x_j} \\
 & + \vec{p}(\vec{x}) \cdot \mathbf{A}(\vec{x})^{-1} \frac{\partial^2 \vec{b}_I(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j}.
 \end{aligned} \tag{D.10}$$

## D.2 Funções peso

As funções peso desempenham um importante papel no desempenho dos métodos sem malha. Elas devem ser construídas de forma que:

- Sejam positivas;
- Garantam a solução única para  $\vec{a}(\vec{x})$ ;
- Sejam funções monotônicas decrescentes com respeito à distância de  $\vec{x}$  para  $\vec{x}_I$ , ou seja, devem representar um decréscimo em sua magnitude à medida que a distância de  $\vec{x}$  com relação  $\vec{x}_I$  aumenta.

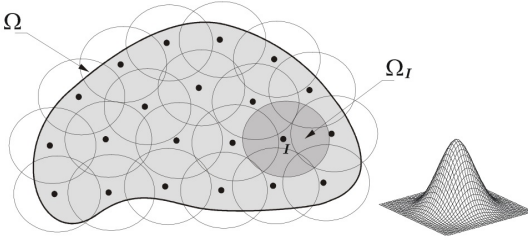
As funções peso são comumente usadas como dependentes da distância entre dois pontos,  $r$ , como:

$$w(\vec{x} - \vec{x}_I) = w_I(r); \text{ sendo } r_I = \|\vec{x} - \vec{x}_I\|. \tag{D.11}$$

A escolha adequada das funções peso é mais ou menos arbitrária à medida que a função seja positiva e contínua, juntamente com suas derivadas até o grau desejado. A escolha do tamanho da região em que a função peso é não nula deve garantir que a matriz momento  $\mathbf{A}(\vec{x})$ , definida na Eq. (D.5), seja invertível. A distribuição de partículas deve satisfazer uma condição de estabilidade para que exista a inversa de  $\mathbf{A}(\vec{x})$ . Esta condição de estabilidade pode ser enunciada como mostra a equação.

$$\text{card} = \{\vec{x}_I \mid \Phi_I(\vec{x}) \neq 0\} \geq \dim[\mathbf{A}(\vec{x})] \tag{D.12}$$

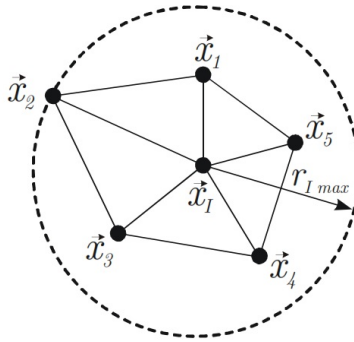
O domínio de influência de uma partícula  $I$  é a região do domínio do problema,  $\Omega_I \subset \Omega$ , em que a função peso  $w_I$  é não nula. A Figura D.2 mostra



**Figura D.2:** Domínio de influência circular (TELES, 2007).

um tipo de domínio de influência do tipo circular para problemas bidimensionais. O suporte de um ponto qualquer  $\vec{x}$  é o conjunto de partículas cuja função peso é diferente de zero em  $\vec{x}$ .

A abrangência do domínio de influência de uma partícula “ $I$ ” deve ser calculada em função da distância de  $\vec{x}_I$  em relação às partículas adjacentes na malha de integração. A Figura (D.3) ilustra o significado de  $r_{I\max}$ , definindo como a máxima distância de  $\vec{x}_I$  às partículas adjacentes. Este parâmetro não é necessariamente a máxima distância, mas sim algum valor relacionado às distâncias das partículas.



**Figura D.3:** Significado geométrico do parâmetro  $r_{I\max}$  (TELES, 2007).

O procedimento para determinar o domínio de influência para cada partícula “ $I$ ” é o seguinte:

(i) Compõe-se a lista de nós adjacentes,  $\vec{L}_I$ , associada à  $\vec{x}_I$ ;

(ii) Determina-se o valor de  $r_{I_{\max}}$ , definido por:

$$r_{I_{\max}} = \max_i \|\vec{x}_i - \vec{x}_I\|; \text{ com } i \in \vec{L}_I; \quad (\text{D.13})$$

(iii) Arbitra-se o valor do fator de abrangência  $s > 1$ , com  $s \in R$ ;

(iv) Calcula-se o valor do raio do domínio de influência  $\bar{r}_I$  do nó “ $I$ ”, definido por:

$$\bar{r}_I = s \cdot r_{I_{\max}} \quad (\text{D.14})$$

### D.3 Tipos de funções peso

A seguir são apresentadas as funções peso utilizadas neste trabalho:

(I) Função peso polinomial par de classe  $C^2(R^2)$

$$\varphi_I(\bar{d}_I) = \begin{cases} 1 - 6\bar{d}_I^4 + 8\bar{d}_I^6 - 3\bar{d}_I^8, & \text{para } \bar{d}_I \leq 1 \\ 0, & \text{para } \bar{d}_I > 1 \end{cases} \quad (\text{D.15})$$

(II) Função peso polinomial de classe  $C^2(R^2)$

$$\varphi_I(\bar{d}_I) = \begin{cases} 1 - 15\bar{d}_I^4 + 24\bar{d}_I^5 - 10\bar{d}_I^6, & \text{para } \bar{d}_I \leq 1 \\ 0, & \text{para } \bar{d}_I > 1 \end{cases} \quad (\text{D.16})$$

(III) Função peso *spline* cúbica

$$\varphi(d_I) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{d}_I^2 + 4\bar{d}_I^3, & \text{para } \bar{d}_I \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\bar{d}_I + 4\bar{d}_I^2 - \frac{4}{3}\bar{d}_I^3, & \text{para } \frac{1}{2} < \bar{d}_I \leq 1 \\ 0, & \text{para } \bar{d}_I > 1 \end{cases} \quad (\text{D.17})$$

(IV) Função peso *spline* quártica

$$\varphi(d_I) = \begin{cases} 1 - 6\bar{d}_I^2 + 8\bar{d}_I^3 - 3\bar{d}_I^4, & \text{para } \bar{d}_I \leq 1 \\ 0, & \text{para } \bar{d}_I > 1 \end{cases} \quad (\text{D.18})$$

(V) Função peso *spline* de sétima ordem

$$\varphi_I(\bar{d}_I) = \begin{cases} 1 - \frac{47}{10} \bar{d}_I^2 + 12 \bar{d}_I^4 - 10 \bar{d}_I^5 + \frac{1}{2} \bar{d}_I^6 + \frac{6}{5} \bar{d}_I^7, & \text{para } \bar{d}_I \leq 1 \\ 0, & \text{para } \bar{d}_I > 1 \end{cases} \quad (\text{D.19})$$

(VI) Função exponencial de classe  $C^0(R^2)$  sendo boa aproximação de  $C^1(R^2)$  e  $C^2(R^2)$  dependendo da escolha do parâmetro  $\alpha$ . Valor típico usado  $\alpha = 0.4$ .

$$\varphi_I(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{e^{-\left(\frac{\bar{d}_I}{\alpha}\right)^4} - e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4}}{1 - e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4}}, & \text{for } \bar{d}_I \leq 1 \\ 0, & \text{for } \bar{d}_I > 1 \end{cases} \quad (\text{D.20})$$

sendo

$$\bar{d}_I = \frac{d_I}{d_{\max}}, \text{ com } d_I = \|\vec{x} - \vec{x}_I\| \quad (\text{D.21})$$

em que  $d_{\max}$  é o tamanho dado do suporte de  $\varphi(d_I)$ .